

Udruženje matematičara TK

17. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

ZADACI I RJEŠENJA

17. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

ZADACI I RJEŠENJA

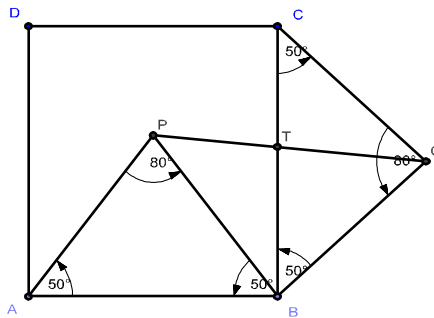
VI/8 i VII/9

1. Stranice AB i BC kvadrata $ABCD$ su osnovice jednakokrakih trouglova $\triangle ABP$ (tačka P je u kvadratu) i $\triangle BCQ$ (tačka Q je izvan kvadrata), gdje je $\angle APB = 80^\circ$ i $\angle BQC = 80^\circ$. Odrediti ugao između duži PQ i BC .

Rješenje: Pošto su trouglovi $\triangle ABP$ i $\triangle BCQ$ jednakokraki s uglovima od 80° pri vrhu P , odnosno Q , to su njihovi uglovi na osnovicama AB , odnosno BC po 50° . Zbog $\overline{AB} = \overline{BC}$ vrijedi $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$, pa je $\overline{BP} = \overline{BQ}$. Jasno je da je $\angle PBC = 40^\circ$, te sada imamo $\angle PBQ = \angle PBC + \angle CBQ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$, što znači da je trougao $\triangle PBQ$ jednakokrako-pravougli i $\angle BQP = \angle BPQ = 45^\circ$. Zato je

$$\angle BTQ = 180^\circ - (\angle TBQ + \angle TQB) = 180^\circ - (50^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ,$$

gdje je T presječna tačka duži BC i PQ .



2. Pet djevojaka: Ajla, Ivona, Kanita, Lamija i Merima sudjelovale su na koncertu na kojem su pjevale pjesme. Svaku su pjesmu otpjevale tri djevojke. Svaku od svojih odabranih pjesama svaka je djevojka pjevala samo jednom. Ajla je otpjevala najviše, i to 8, a Ivona najmanje, i to 5 pjesama. Koliko je ukupno pjesama otpjevalo ovih 5 djevojaka?

Rješenje: Označimo sa $8, 5, k, l, m$ redom brojeve pjesama koje su otpjevale Ajla, Ivona, Kanita, Lamija i Merima. One su ukupno otpjevale

$$\frac{8 + 5 + k + l + m}{3}$$

pjesama, pa broj $8 + 5 + k + l + m$ mora biti djeljiv sa 3. Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$$\begin{aligned} k &> 5, l > 5, m > 5 \text{ i} \\ k &< 8, l < 8, m < 8, \end{aligned}$$

tj. $k, l, m \in \{6, 7\}$. Jedina mogućnost da $13 + k + l + m$ bude djeljiv sa 3 je da dva od brojeva k, l, m budu jednaka 7, a jedan da je broj 6. Dakle, ukupan broj otpjevanih pjesama je

$$\frac{8 + 5 + 7 + 7 + 6}{3} = 11.$$

3. Cifre a, b, c, d su različite i svaka od njih je prost broj. Napisati sve brojeve $\overline{ab10cd}$ koji su djeljivi sa 264.

Rješenje: Označimo sa $x = \overline{ab10cd}$. Kako je $264 = 3 \cdot 8 \cdot 11$, zaključujemo da $3 \mid x, 8 \mid x$ i $11 \mid x$. Da $8 \mid x$ znači da dvocifreni završetak $\overline{cd}$ mora biti djeljiv sa 8 (jer trocifreni završetak počinje cifrom 0), a to onda znači da je d parna cifra, tj. $d = 2$ (kao jedini paran i prost broj), dakle, $x = \overline{ab10c2}$. Zato ostaju dvije mogućnosti: $\overline{c2} = 32$ ili $\overline{c2} = 72$, tj. $c \in \{3, 7\}$.

Dalje imamo:

$$\begin{array}{lcl} 3 & \mid & x \Rightarrow 3 \mid (a + b + 1 + 0 + c + 2) \Rightarrow 3 \mid (a + b + c + 3), \\ 11 & \mid & x \Rightarrow 11 \mid ((a + 1 + c) - (b + 0 + 2)) \Rightarrow 11 \mid (a + c - b - 1). \end{array}$$

Uočimo da, prema uvjetima zadatka, može biti $a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$. Razmotrimo sljedeća dva slučaja:

$$1^\circ c = 3 \Rightarrow 3 \mid (a + b + 6) \text{ i } 11 \mid (a - b + 2)$$

Kako su $a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$, iz $11 \mid (a - b + 2)$ zaključujemo da mora biti $a - b + 2 = 0$ (jer ne može biti $a - b + 2 = 11$), tj. $b = a + 2$. Zbog toga je $a + b + 6 = 2a + 8$, pa $3 \mid 2(a + 4)$, iz čega slijedi da je $a \in \{2, 5\}$. No, ne može biti $a = 2$, jer bi bilo $b = 4$, a to nije prost broj. Tako ostaje $a = 5, b = 7$, pa je $x = 570132$.

$$2^\circ c = 7 \Rightarrow 3 \mid (a + b + 10) \text{ i } 11 \mid (a - b + 6)$$

Analogno zaključujemo da iz $11 \mid (a - b + 6)$ slijedi da je ili $a - b + 6 = 0$ ili $a - b + 6 = 11$, tj. $a = b - 6$ ili $a = b + 5$. Ako bi bilo $a = b - 6$, tada bi moralo biti $b = 7$, pa je $a = 1$, a to nije prost broj. Dakle, ta mogućnost ne dolazi u obzir. Ako je $a = b + 5$, tada mora biti $b = 2$ i $a = 7$. No, tada bi bilo da $3 \mid 17$, što je nemoguće, pa i ova mogućnost ne dolazi u obzir.

Dakle, rješenje je broj $x = 571032$.

4. Neki čovjek je prvog dana u mjesecu nakon primljene plate potrošio 100 KM od te plate. Poslije 10 dana dobio je na lutriji $\frac{1}{4}$ od sume novca koju je imao u tom trenutku i potrošio 100 KM. Nakon 10 dana ponovo je dobio $\frac{1}{4}$ sume koju je imao u tom trenutku i potrošio 100 KM. Na kraju je imao 800 KM više nego prvog dana u mjesecu. Koliku je platu primio taj čovjek?

Rješenje: Neka x označava iznos plate. Nakon 10 dana čovjek prvo ima $x - 100$ KM, a onda još dobije $\frac{1}{4}(x - 100)$, pa tada ima

$$x - 100 + \frac{1}{4}(x - 100) = \frac{5}{4}x - 125 \text{ KM.}$$

Nakon toga je potrošio 100 KM, pa je imao $\frac{5}{4}x - 225$ KM. Poslije 10 dana dobio je još $\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}x - 225\right)$ KM, te je tada imao

$$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}x - 225\right) \text{ KM,}$$

a nakon što je potrošio još 100 KM, imao je sljedeći iznos

$$\frac{5}{4} \left(\frac{5}{4}x - 225 \right) - 100 = x + 800.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} \frac{25}{16}x - \frac{1125}{4} &= x + 900, \\ \text{tj. } \frac{25x - 4500}{16} &= x + 900, \end{aligned}$$

odakle je $x = 2100$ KM.

17. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

ZADACI I RJEŠENJA

VII/8 i VIII/9

1. Svakog mjeseca Adna i njen brat Tarik dobijaju od svojih roditelja jedan isti iznos za džeparac i taj džeparac oni potroše zajedno za 24 dana. Međutim, u decembru 2011. godine oni su potrošili zajednički džeparac za 20 dana, pri čemu je Adna trošila dnevno 10% više nego prethodnih mjeseci, a Tarik je trošio 35% više dnevno nego prethodnih mjeseci. Ko od njih troši više i koliko puta više u ostalim mjesecima (osim u decembru 2011. godine)?

Rješenje: Označimo sa x iznos novca koji prosječno dnevno troši Adna u toku "normalnog" mjeseca (tj. mjeseca prije decembra 2011. godine), a sa y iznos novca koji prosječno dnevno troši Tarik. Neka je $y = kx$. Njih dvoje zajedno, dakle, za jedan taj mjesec potroše $24(x + kx)$ novca. Tokom decembra 2011. godine Adna je trošila $1,1x$ novca dnevno, a Tarik $1,35y = 1,35kx$ novca. To znači da su njih dvoje zajedno za 20 dana u decembru potrošili $20(1,1x + 1,35kx)$ novca. Tako dobijamo jednadžbu

$$24(x + kx) = 20(1,1x + 1,35kx),$$

odakle je $k = \frac{2}{3}$. Dakle, $y = \frac{2}{3}x$, odnosno $x = \frac{3}{2}y = 1,5y$, što znači da Adna u "normalnom" mjesecu troši 1,5 puta više novca od Tarika.

2. Neka nenulti realni brojevi x, y, z zadovoljavaju jednakosti

$$xy = \frac{z - x + 1}{y} = \frac{z + 1}{2}.$$

Dokazati da je jedan od njih aritmetička sredina druga dva.

Rješenje: Neka je

$$xy = \frac{z - x + 1}{y} = \frac{z + 1}{2} = t.$$

Tada je $xy = t$, $z - x + 1 = yt$, $z + 1 = 2t$ i $t \neq 0$. Odavde nalazimo

$$z = 2t - 1, x = 2t - yt = (2 - y)t, xy = t.$$

Nadalje imamo $t = (2 - y)ty$. Kako je $t \neq 0$, to je $1 = 2y - y^2$, tj. $(y - 1)^2 = 0$, pa je $y = 1$. Tada je $x = 2t - t = t$, pa iz $z = 2t - 1$ slijedi

$$x = t = \frac{z + 1}{2} = \frac{z + y}{2},$$

što je i trebalo dokazati.

3. Neka su t_a i t_c težne linije povučene iz vrhova A i C trougla ABC , respektivno. Ako su ove težišnice međusobno ortogonalne, dokazati da je $a^2 + c^2 = 5b^2$.

Rješenje: Neka je T težište trougla ABC . Prema uslovu zadatka trougao ATC je pravougli, pa na osnovu Pitagorinog teorema vrijedi

$$b^2 = \frac{4}{9}t_a^2 + \frac{4}{9}t_c^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_c^2),$$

tj. $9b^2 = 4(t_a^2 + t_c^2)$.

Odredimo sada kvadrate dužina težišnih linija. Produžimo težišnicu t_a za istu tu dužinu. Neka je D krajnja tačka nastavka. Tada je četverougao $ABDC$ paralelogram, jer se njegove dijagonale AD i BC polove. Na pravoj AB uzmimo tačke E i F tako da je $DF \perp AB$ i $CE \perp AB$. Tada su pravougli trouglovi AEC i BFD podudarni, pa je $|AE| = |BF|$. Stavimo da je

$$|AE| = x, \quad |AB| = c, \quad |BD| = |AC| = b, \quad |BC| = a \quad \text{i} \quad |DF| = |CE| = h.$$

Tada je: $|AD| = 2t_a$, $|AF| = c + x$ i $|EB| = c - x$. Primjenom Pitagorinog teorema na trouglove AFD , EBC i AEC dobije se:

$$\begin{aligned} 4t_a^2 &= h^2 + (c + x)^2, \\ a^2 &= h^2 + (c - x)^2, \\ b^2 &= h^2 + x^2. \end{aligned}$$

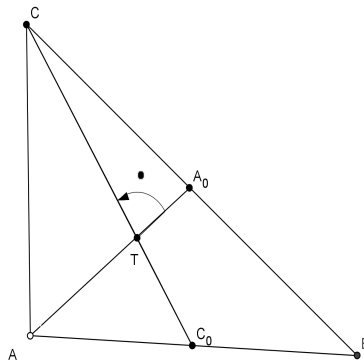
Sabiranjem prve dvije jednakosti imamo

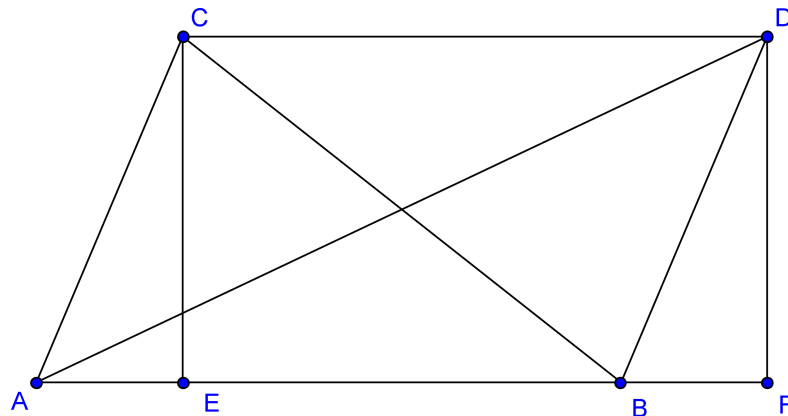
$$4t_a^2 + a^2 = 2h^2 + 2c^2 + 2x^2.$$

Oдавде je, na osnovu treće jednakosti, $4t_a^2 + a^2 = 2c^2 + 2b^2$, tj.

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2.$$

Analogno vrijedi $4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$. Na osnovu ovog vrijedi $9b^2 = 4(t_a^2 + t_c^2) = 4b^2 + a^2 + c^2$, tj. $5b^2 = a^2 + c^2$.





4. Dokazati da za sve realne brojeve a vrijedi nejednakost:

$$(1 + a + a^2)^2 \leq 3(1 + a^2 + a^4).$$

Rješenje: *Imamo*

$$\begin{aligned} (1 + a + a^2)^2 &\leq 3(1 + a^2 + a^4) \\ \Leftrightarrow 1 + a^2 + a^4 + 2a + 2a^2 + 2a^3 &\leq 3 + 3a^2 + 3a^4 \\ \Leftrightarrow 2a^4 - 2a^3 - 2a + 2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^4 - a^3 - a + 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^3(a - 1) - (a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a^3 - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a - 1)(a^2 + a + 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 + a + 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2 \left[\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] &\geq 0, \end{aligned}$$

a posljednja nejednakost je tačna, jer je $(a - 1)^2 \geq 0$ i $\left[a + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4} > 0$, pa je i data nejednakost tačna. Vrijedi jednakost samo u slučaju kad je $a - 1 = 0$, tj. $a = 1$.

17. FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

ZADACI I RJEŠENJA

VIII/8

1. Ako je $a + b + c = 0$, dokazati da je tada $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} A &= a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = a^3 + a^2c + a^2b - a^2b - abc + b^2c + b^3 \\ &= a^2(a + b + c) + b^2c + b^3 + ab^2 - ab^2 - a^2b - abc \\ &= a^2(a + b + c) + b^2(a + b + c) - ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 - ab) \\ &= 0 \cdot (a^2 + b^2 - ab) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Neka je p prost broj. U skupu prirodnih brojeva riješiti jednadžbu

$$6xy + 3py - 4x - 13p = 0.$$

Rješenje: Nakon izvlačenja ispred zagrade $3y$ iz prva dva sabirka, dobije se jednadžba

$$3y(2x + p) - 4x - 13p = 0.$$

Oдавde imamo

$$3y(2x + p) - 2(2x + p) = 11p$$

odnosno

$$(2x + p)(3y - 2) = 11p.$$

Kako su x i y prirodni brojevi i p prost, to je $2x + p \geq 4$, $2x + p \geq p + 2$ i $3y - 2 \geq 1$. Faktori broja $11p$ su: $1, 11, p$ i $11p$. Prema naprijed navedenim uslovima mogući su slučajevi:

Prvi slučaj: $2x + p = 11p$, $3y - 2 = 1$. Oдавde je $x = 5p$, $y = 1$ i p bilo koji prosti broj.

Drugi slučaj: $2x + p = 11$ i $3y - 2 = p$. Oдавde je $x = \frac{11-p}{2}$ i $y = \frac{p+2}{3}$. Kako je x prirodan broj, to p mora biti neparan prost broj manji od 11. Dakle, $p = 3$ ili $p = 5$ ili $p = 7$.

Za $p = 3$ imamo $x = 4$, $y = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N}$, pa ovaj slučaj otpada.

Za $p = 5$ imamo $x = 3$, $y = \frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$, pa ovaj slučaj otpada.

Za $p = 7$ imamo $x = 2$ i $y = 3$.

Dakle, rješenja su:

$$(x, y, p) \in \{(2, 3, 7), (5q, 1, q)\} \quad \text{gdje je } q \text{ proizvoljan prost broj.}$$

3. Uglovi na većoj osnovici jednakokrakog trapeza iznose po 60° , a njegov obim iznosi $4p$ ($p > 0$). Odrediti dužine njegovih stranica (osnovica a i c i kraka b) tako da njegova površina bude najveća moguća.

Rješenje: Neka je $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ i $\overline{AD} = \overline{BC} = b$. Pošto su trouglovi $\triangle AFD$ i $\triangle BGE$ pravougli i $\angle DAF = \angle CBE = 60^\circ$, to je $\overline{AF} = \overline{BE} = \frac{1}{2}b$. Također je $\overline{AF} = \overline{BE} = \frac{a-c}{2}$. Dakle, imamo

$$\frac{1}{2}b = \frac{a-c}{2} \Rightarrow b = a-c. \quad (1)$$

Sada je, zbog (1),

$$O = a + c + 2b,$$

tj.

$$\begin{aligned} 4p &= a + c + 2(a-c) \Rightarrow 3a - c = 4p \\ \Rightarrow c &= 3a - 4p. \end{aligned} \quad (2)$$

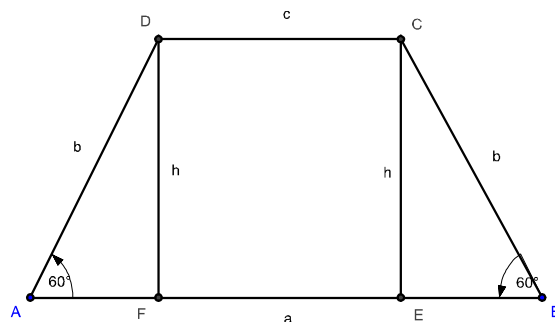
Iz trouglova $\triangle ADF$ i $\triangle BCE$ imamo, zbog (2),

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-c) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-3a+4p) \\ \Rightarrow h &= (2p-a)\sqrt{3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Površina trapeza je tada, zbog (2) i (3),

$$\begin{aligned} P &= \frac{a+c}{2}h = \frac{a+3a-4p}{2}(2p-a)\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}(a-p)(2p-a) = 2\sqrt{3}(-a^2+3ap-2p^2) \\ &= -2\sqrt{3}(a^2-3ap+2p^2) \\ &= -2\sqrt{3}\left[\left(a-\frac{3p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}\right] \\ &= 2\sqrt{3}\left[\frac{p^2}{4} - \left(a-\frac{3p}{2}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Dakle, $P_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{4}p^2$ ako je $a - \frac{3p}{2} = 0$, tj. $a = \frac{3p}{2}$, $c = \frac{p}{2}$, $b = a - c = p$.



4. Neka je

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1 < \sqrt{1 + \sqrt{n}} < 2. \right\}.$$

a) Odrediti sve elemente skupa A .

b) Odrediti podskup B skupa A tako da vrijedi

$$(\forall n \in B) \quad \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \sqrt{n}} - 1 \right) < 1.$$

Rješenje: a) Kako je $n \in \mathbb{N}$, to je $n \geq 1$, pa je $\sqrt{1 + \sqrt{n}} > 1$, pa trebamo odrediti one prirodne brojeve n za koje je $\sqrt{1 + \sqrt{n}} < 2$. Kvadriranjem ove nejednakosti dobije se $\sqrt{n} < 3$, pa je $n < 9$. Dakle, $A = \{1, 2, \dots, 8\}$.

b) Uslov $\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \sqrt{n}} - 1 \right) < 1$ je ekvivalentan sa $\sqrt{1 + \sqrt{n}} - 1 < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Nadalje imamo niz ekvivalentnih nejednakosti

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{n}} &< \frac{1 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\left(\sqrt{1 + \sqrt{n}} \right)^2}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{\sqrt{1 + \sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow 1 &< \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Odmah se vidi da brojevi 1 i 2 zadovoljavaju posljednju nejednakost. Naime, ako je $n \geq 3$, tada je

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} < 1.$$

Prema tome, $B = \{1, 2\}$.