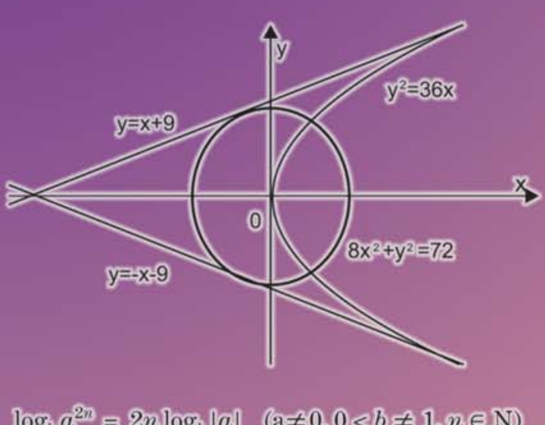
MEHMED NURKANOVIĆ ZEHRA NURKANOVIĆ

ELEMENTARNA MATEMATIKA

Teorija i zadaci



$\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}<\sqrt{2}$

$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$

$\log_{\sin x}(\cos x)\leq 1$

$\log_b a^{2n} = 2n\log_b |a| \quad (a\neq 0, 0<b\neq 1, n\in \mathrm{N})$

Maturski ispiti

Prijemni ispiti na fakultetima

Prof. dr. sc. Mehmed Nurkanović
Doc. dr. sc. Zehra Nurkanović
ELEMENTARNA MATEMATIKA - Teorija i zadaci

Recenzenti:
Dr. sc. Šefka Arslanagić, vanredni profesor
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu
Dr. sc. Hasan Jamak, vanredni profesor
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu

Izdavač:
"PrintCom", d.o.o., grafički inženjering, Tuzla

Za izdavača:
Jasmin Hadžimehmedović

Korektura, kompjuterska obrada teksta i naslovna strana:
AUTORI

Crteži:
Dr. sc. Zehra Nurkanović, docent

Štampa:
"PrintCom", d.o.o., grafički inženjering, Tuzla

Za štampariju:
Delila Hadžimehmedović

Tiraž:
500 primjeraka

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Univerzitetska i narodna biblioteka
Bosne i Hercegovine

Dr. sc. Mehmed Nurkanović

Dr. sc. Zehra Nurkanović

ELEMENTARNA MATEMATIKA
Teorija i zadaci

Prvo izdanje

Tuzla, 2009.

Ajli i Merimi

PREDGOVOR

Budući da na našem tržištu skoro da i nema matematičkih knjiga u kojima se na sistematski način obrađuju najvažniji dijelovi elementarne matematike koja se izučava u srednjim školama, odlučili smo u tom smislu dati svoj doprinos i napisati ovu knjigu, za koju moramo istaknuti da ima višestruku namjenu. Naime, na našem podneblju uglavnom prevladava udžbenička literatura s matematičkim sadržajima koji se uglavnom odnose ili na određeni razred srednje škole ili na određenu specijalnu oblast elementarne matematike. Ova knjiga, međutim, obuhvata skoro sve najvažnije dijelove matematičkog sadržaja koji se izučava u srednjim školama kao i u okviru predmeta Elementarna algebra na prvoj godini studija Matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli (te sličnim predmetima studija Matematike na drugim Prirodno-matematičkim fakultetima u zemlji i inozemstvu). Dakle, knjiga je namijenjena kako studentima Matematike tako i srednjoškolcima. Srednjoškolci je mogu vrlo uspješno koristiti u pripremama za redovnu ili dodatnu nastavu, za pripreme za razna matematička natjecanja, ali i u pripremanju za polaganje maturskog ispita, kao i prijemnih ispita na fakultetima. Također, knjiga može vrlo uspješno poslužiti i profesorima matematike u davanju direktnih uputstava učenicima i studentima. Zbog toga se nadamo da će ona predstavljati vrlo koristan prilog udžbeničkoj literaturi iz elementarne matematike.

U svojoj osnovnoj koncepciji knjiga je podijeljena u dva poglavlja:

1. Teorija i zadaci i
2. Rješenja, upute i rezultati.

U prvom poglavlju se obrađuje šesnaest različitih oblasti elementarne matematike posebno odvojenih u sekcije, koje su koncipirane tako da na samom početku sadrže najbitnije teoretske postavke uz bogatu ilustraciju primjerima različitog nivoa težine (uključujući i nešto teže zadatke koji su ili bili na nekim matematičkim natjecanjima ili mogu poslužiti u pripremama za natjecanja), a nakon toga slijedi izbor zadataka za samostalan rad. Rješenja, upute i rezultati zadataka za samostalan rad dati su u drugom poglavlju. Smatramo da je ovakav pristup u rasporedu razdvojenog pisanja zadataka i njihovih rješenja dobar metodički pristup, jer je najbolje za rješavatelje zadataka da pokušaju što više samostalno da riješe zadatak, pa tek nakon više pokušaja da eventualno pogledaju rješenje, uputu ili rezultat. Tako rješavateljima zadataka preporučujemo da prvo dobro prouče kratke teorijske osnove pojedinih oblasti, da prerade i dobro izanaliziraju urađene primjere, a tek nakon toga pristupe izradi zadataka za samostalan rad, te da pri tome svoje rezultate upoređuju s ponuđenim rješenjima u drugom poglavlju knjige kako bi tako kontrolirali ispravnost svojih postupaka pri rješavanju pojedinih zadataka. Na taj način oni će se postepeno osposobljavati za samostalno rješavanje kako standardnih, tako i težih, problema iz elementarne matematike, a istovremeno će usavršavati postupak za takvo rješavanje. U okviru trinaeste sekcije prvog poglavlja sadržan je dodatak vezan za procentni račun, oblast koja, iako dobro poznata još od osnovne škole, ipak zavrjeđuje posebnu pažnju, budući da praksa pokazuje da učenici nedovoljno dobro vladaju ovom problematikom, a sve više se zadaci iz ove oblasti pojavljuju na prijemnim ispitima na pojedinim fakultetima.

Posebno mjesto u prvom poglavlju zauzima svaka od tri posljednje sekcije: Testovi iz predmeta Elementarna algebra, Maturski ispiti i Prijemni ispiti na Univerzitetu u Tuzli. U okviru prve od njih sadržani su zadaci u toku posljednje tri školske godine sa testova iz predmeta Elementarna algebra na Odsjeku Matematika Prirodno-matematičkog fakulteta u Tuzli. Smatramo da će ova sekcija, zajedno sa svim drugim, umnogome pomoći studentima u pripremama za polaganje ispita iz ovog predmeta. Istaknimo da predavanja iz ovog predmeta uglavnom prate sadržaj prethodnih sekcija prvog poglavlja knjige. Velika vrijednost ove knjige je što sadrži teorijsku analizu, kao i veći broj primjera, rješavanja raznih jednadžbi i nejednadžbi elementarne matematike s parametrima, problematiku koja se rijetko susreće u matematičkoj literaturi. U okviru devetnaeste sekcije nalaze se zadaci s maturskih ispita iz predmeta Matematika, od trenutka (2006. god.) kada se ovaj ispit utemeljuje kao jedinstven ispit za gimnazije na teritoriji Tuzlanskog kantona. Na taj način učenicima se pruža izuzetna prilika da imaju potpuni pregled sa svih dosadašnjih zajedničkih maturskih ispita, ali da se, koristeći ovu knjigu u punom kapacitetu, mogu vrlo uspješno pripremati za sopstveni maturski ispit koji im predstoji. Posljednja sekcija prvog poglavlja posvećena je zadacima s prijemnih ispita na većini fakulteta Tuzlanskog univerziteta u posljednjih nekoliko godina.

Iz podatka o broju upotrijebljenih stranica za svako od dva poglavlja knjige moguće je uočiti da ovdje nije riječ o klasičnoj zbirci zadataka, već o mnogo sadržajnijoj knjizi. Stoga se nadamo da će knjiga u potpunosti ispuniti naša očekivanja i opravdati svoju višestruku namjenu.

Recenzentima, prof. dr. Šefketu Arslanagiću i prof. dr. Hasanu Jamaku, najiskrenije se zahvaljujemo na uloženom trudu i korisnim savjetima koji su doprinijeli boljem izgledu ove knjige.

Svjesni činjenice da postoje i neki propusti u pisanju ove knjige, unaprijed se zahvaljujemo svim pažljivim čitocima na argumentiranim primjedbama, koje mogu poslati na mail adrese: *mehmed.nurkanovic@untz.ba* i *zehra.nurkanovic@untz.ba.*

Tuzla, decembar 2009. godine

Autori

Sadržaj

Poglavlje 1

Teorija i zadaci

1.1 Polinomi

Definicija 1.1.1 *Funkcija oblika*

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \\ & (a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, ..., n;\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

naziva se ***polinomom*** *n-tog stepena s jednom promjenljivom. Brojevi*

$$a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$$

nazivaju se koeficijentima polinoma, a izrazi $a_i x^i$ članovima polinoma.

Stepen polinoma P označavat ćemo sa $\deg(P)$. Tako je u slučaju polinoma (1.1) $\deg(P) = n$. U tom smislu *polinomom nultog stepena* smatrat ćemo konstantu različitu od nule, tj. $P = a_0 \neq 0$ i $\deg(P) = 0$. S druge strane, iz određenih razloga, takozvanom *nultom polinomu* $P = 0$ ne pripisujemo određeni stepen.

Napomenimo da se u nekim slučajevima mogu pojavljivati i polinomi s više promjenljivih, mada se oni uvijek mogu smatrati polinomima jedne promjenljive, dok se ostale promjenljive shvataju kao parametri. Tako se, na primjer, polinom $5a^2x^3 - 2b^5x + 3a^4b$, može shvatiti kao polinom trećeg stepena po x, odnosno kao polinom četvrtog stepena po a ili kao polinom petog stepena po b.

Sljedeći primjer može biti od značajne praktične pomoći pri rješavanju nekih problema o polinomima.

Primjer 1.1.1 *a) Koeficijent a_0, tzv.* ***slobodni član****, polinoma (1.1) jednak je vrijednosti $P(0)$ polinoma P za $x = 0$, tj.*

$$a_0 = P(0). \tag{1.2}$$

b) Zbir svih koeficijenata polinoma (1.1) jednak je vrijednosti tog polinoma za $x = 1$, tj.

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = P(1). \quad \clubsuit \tag{1.3}$$

Definicija 1.1.2 *Dva polinoma, P i Q, su identički jednaka ako imaju jednake stepene i ako su im koeficijenti članova istog stepena jednaki međusobno, to jest ako je*

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0, \quad Q(x) = b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$$

i

$$a_n = b_n, \; ... \; , \; a_1 = b_1, \; a_0 = b_0.$$

Jednostavno se dokazuje sljedeća tvrdnja.

Teorem 1.1.1 *Neka su P i Q polinomi, oba različita od nultog. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \deg(PQ) &= \deg(P) + \deg(Q), \\ \deg(P \pm Q) &\leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}. \end{aligned}$$

Zbog svoje iznimne važnosti, posebno ćemo razmatrati pojam *dijeljenja polinoma.*

Definicija 1.1.3 *Neka su M i N polinomi, pri čemu je polinom N različit od nultog ($N \neq 0$). Ako postoji polinom Q takav da vrijedi $M = N \cdot Q$, onda kažemo da je polinom M djeljiv polinomom N, odnosno da je polinom N djelitelj ili faktor (činilac) polinoma M. Pri tome polinom Q nazivamo količnikom pri dijeljenju polinoma M polinomom N.*

Prema prethodnoj definiciji, polinom $2x^2 - x - 6$ je djeljiv polinomom $x - 2$, budući da je $(x-2)(2x+3) = 2x^2 - x - 6$. Polinom $2x+3$ je količnik odgovarajućeg dijeljenja i pišemo: $\left(2x^2 - x - 6\right) : (x-2) = 2x + 3$.

S druge strane, polinom $x^2 + 4$ nije djeljiv s $x - 2$. Naime, ako bi, prema gornjoj definiciji, postojao polinom Q, takav da vrijedi $x^2 + 4 = (x-2)\,Q(x)$, onda bi ta jednakost morala da vrijedi za sve realne vrijednosti promjenljive x, što očito nije tačno (npr. za $x = 2$ lijeva strana te jednakosti ima vrijednost 8, a desna 0).

Zbog toga ćemo uvesti pojam dijeljenja polinoma s ostatkom zasnovan na sljedećem teoremu.

Teorem 1.1.2 *Neka su M i N polinomi, pri čemu je polinom N različit on nultog ($N \neq 0$). Tada postoje polinomi Q i R, koji su jednoznačno određeni, tako da vrijedi*

$$M = NQ + R,$$

pri čemu je $R = 0$ ili je $\deg(R) < \deg(N)$.

Polinom Q iz prethodnog teorema nazivamo *količnikom*, a polinom R *ostatkom* pri dijeljenju polinoma M polinomom N.

Ponekad je potrebno odrediti samo ostatak pri dijeljenju dvaju polinoma, pri čemu nas količnik uopće ne zanima. U slučaju dijeljenja linearnim binomom $x - \alpha$ o tome govori sljedeći tzv. *Bezoutov teorem.*

Teorem 1.1.3 *(**Bezout**[1]) Ostatak R pri dijeljenju polinoma P binomom $x - \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ jednak je vrijednosti polinoma za $x = a$, tj. $R = P(a)$.*

Dokaz. Ostatak pri dijeljenju polinoma s $x - \alpha$ mora biti nula ili polinom stepena manjeg od stepena binoma $x - \alpha$, tj. stepena nula. Dakle, taj ostatak je u svakom slučaju neki realan broj. Označimo ga sa r. Imamo

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x) + r,$$

za neki polinom Q. Kako gornja jednakost vrijedi za sve realne vrijednosti promjenljive x, to zamjenom $x = \alpha$ dobijamo $P(\alpha) = (\alpha - \alpha) Q(x) + r = r$. ■

Posljedica 1.1.1 *Polinom P djeljiv je linearnim binomom $x - \alpha$ ako i samo ako je $P(\alpha) = 0$.*

Primjer 1.1.2 *a) Ispitati da li je polinom $P = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ djeljiv s $x - 2$.*
b) Rastaviti na proste faktore izraz $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$.

Rješenje. a) Kako je $P(2) = 0$, prema posljedici Bezoutovog teorema, polinom P je djeljiv s $x - 2$, pa vrijedi $P = (x-2)\left(x^2 - 3x + 4\right)$.

b) Dati polinom možemo smatrati polinomom trećeg stepena po promjenljivoj a, tj. $P(a)$. Kako je $P(b) = (b-b)^3 + (b-c)^3 + (c-b)^3 = 0$, zaključujemo da je dati izraz djeljiv s $a - b$. S druge strane, dati izraz se može smatrati i polinomom trećeg stepena po promjenljivoj b, tj. $P(b)$. Budući da je $P(c) = 0$, zaključujemo da je izraz djeljiv i s $b - c$. Analogno zaključujemo da je taj izraz djeljiv i s $c - a$, pa je djeljiv s $(a-b)(b-c)(c-a)$, tj. vrijedi

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = m(a-b)(b-c)(c-a),$$

gdje je m konstanta koju treba odrediti. Posljednja jednakost je zadovoljena za sve realne vrijednosti za a, b i c, pa je dovoljno uzeti bilo koje, ali međusobno različite, vrijednosti tih promjenljivih. Npr. za $a = 0, b = 1, c = 2$, dobije se $m = 3$. Dakle,

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a). \quad \clubsuit$$

[1] Etienne Bézout (1730.-1783.), francuski matematičar

Primjer 1.1.3 *Odrediti vrijednost parametra k tako da izraz $x^3+y^3+z^3-kxyz$ bude djeljiv s $x+y+z$.*

Rješenje. Dati izraz možemo shvatiti kao polinom po x, tj.

$$P(x)=x^3+y^3+z^3-kxyz.$$

S druge strane, izraz $x+y+z$ možemo smatrati linearnim binomom po x, tj. $x+y+z=x-(-y-z)=x-\alpha$, gdje je $\alpha=-y-z$. Prema posljedici Bezoutovog teorema, treba da je $P(\alpha)=P(-y-z)=0$, tj.

$$(-y-z)^3+y^3+z^3-k(-y-z)yz=0,$$

odakle slijedi $k=3$.

Primjer 1.1.4 *Neki polinom pri dijeljenju s $x-1$ daje ostatak 3, a pri dijeljenju s $x-2$ daje ostatak 4. Čemu je jednak ostatak pri dijeljenju tog polinoma s $(x-1)(x-2)$?*

Rješenje. Primjenom Bezoutovog teorema imamo $P(1)=3$ i $P(2)=4$. Kako je polinom $(x-1)(x-2)$ stepena dva, onda je traženi ostatak polinom najviše prvog reda, tj. $R(x)=ax+b$, gdje su a i b nepoznati koeficijenti koje treba odrediti. Imamo $P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+(ax+b)$. Uzimajući za $x=1$ i $x=2$, dobijamo $a+b=3, 2a+b=4$, odakle je $a=1$ i $b=2$. Dakle, traženi ostatak je $x+2$. ♣

Rastavljanje polinoma na proste faktore (činioce)

Da bi se uspješno moglo pristupiti problemu rastavljanja polinoma na proste faktore, neophodno je znati sljedeća pravila:

a) *Razlika kvadrata*

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y). \tag{1.4}$$

b) *Razlika kubova*

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right). \tag{1.5}$$

c) *Zbir kubova*

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right). \tag{1.6}$$

d) *Kvadrat zbira i razlike*

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2. \tag{1.7}$$

e) *Kub zbira i razlike*

$$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3. \tag{1.8}$$

Primjer 1.1.5

a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 \overset{(1.4)}{=} (x-2)(x+2)$;

b) $(x-y)^2 - (x+y)^2 \overset{(1.4)}{=} [(x-y)-(x+y)][(x-y)+(x+y)] = -4xy$;

c) $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 =$

$= \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - (2ab)^2 \overset{(1.4)}{=} \left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)$. ♣

Primjer 1.1.6

a) $1 - a^3 \overset{(1.5)}{=} (1-a)\left(1 + a + a^2\right)$;

b) $a^6 - b^6 = \left(a^2\right)^3 - \left(b^2\right)^3 \overset{(1.5)}{=} \left(a^2 - b^2\right)\left(a^4 + a^2b^2 + b^4\right)$

$\overset{(1.4)}{=} (a-b)(a+b)\left[\left(a^2+b^2\right)^2 - a^2b^2\right] =$

$\overset{(1.4)}{=} (a-b)(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$;

c) $a^6 - b^6 = \left(a^3\right)^2 - \left(b^3\right)^2 \overset{(1.4)}{=} \left(a^3 - b^3\right)\left(a^3 + b^3\right) \overset{(1.5)\ i\ (1.6)}{=}$

$= (a-b)(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$. ♣

Primjer 1.1.7

a) $9999^2 = (10000-1)^2 \overset{(1.7)}{=} 10000^2 - 2 \cdot 10000 \cdot 1 + 1^2 = 99980001$;

b) $(mp - nq)^2 + (np + mq)^2 \overset{(1.7)}{=} m^2p^2 - 2mnpq + n^2q^2 + n^2p^2 + 2mnpq + m^2q^2$

$= \left(m^2p^2 + m^2q^2\right) + \left(n^2q^2 + n^2p^2\right) = m^2\left(p^2 + q^2\right) + n^2\left(p^2 + q^2\right)$

$= \left(m^2 + n^2\right)\left(p^2 + q^2\right)$;

c) $4x^3 - 6x^2 + 9x = x\left(4x^2 - 6x + 9\right) \overset{(1.7)}{=} x(2x-3)^2$. ♣

Posebno tešku klasu zadataka čine problemi rastavljanja na proste faktore kvadratnih trinoma koji nisu potpuni kvadrati. Pokazat ćemo dva metoda u slučajevima kada ih je moguće primijeniti.

Prvi metod se sastoji u tome da se *srednji sabirak (član trinoma koji je monom prvog reda) napiše u obliku zbira dva člana čiji je proizvod koeficijenata jednak proizvodu koeficijenata prvog i trećeg člana kvadratnog trinoma.* Naprimjer,

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= x^2 + (1-4)x - 4 = x^2 + x - 4x - 4 \\ &= x(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x-4), \end{aligned}$$

gdje smo srednji član napisali kao zbir dva člana x i $-4x$, za čije koeficijente vrijedi $(-1) \cdot 4 = 1 \cdot (-4)$.

Drugi metod je zasnovan na *dopunjavanju do kvadrata binoma.* Naprimjer,

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \overset{(1.4)}{=} \\ &= \left(x - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) = (x+1)(x-4). \end{aligned}$$

Općenito to izgleda ovako. Neka je kvadratni trinom oblika $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Tada imamo

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Ukoliko je $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = p^2$ za neko $p \in \mathbb{R}$, tada se može primijeniti pravilo razlike kvadrata:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - p^2\right] = a\left(x + \frac{b}{a} - p\right)\left(x + \frac{b}{a} + p\right).$$

Ovaj drugi metod je naizgled složeniji od prvog metoda, ali je na neki način univerzalniji, budući da se u prvom metodu zahtijeva "pogađanje" rastavljanja srednjeg člana na zbir dva nova, što u težim zadacima može biti vrlo komplicirano.

Primjer 1.1.8

a) $2x^2 - xy - 6y^2 = 2x^2 + 3xy - 4xy - 6y^2$
$= x(2x + 3y) - 2y(2x + 3y) = (2x + 3y)(x - 2y)\,;$

b) $2x^2 - xy - 6y^2 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}xy - 3y^2\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}y\right)^2 - \frac{1}{16}y^2 - 3y^2\right]$

$= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}y\right)^2 - \left(\frac{7}{4}y\right)^2\right]$

$= 2(x - 2y)\left(x + \frac{3}{2}y\right) = (x - 2y)(2x + 3y)\,.$ ♣

◦ ◦ ◦

Zadaci za samostalan rad

Rastaviti na faktore (**1-9**):

1. a) $x^2 + 3x + 2$; b) $x^2 + 6x + 8$; c) $x^2 + 12x + 35$.

2. a) $x^2 - 3x - 4$; b) $x^2 - 7x - 30$; c) $2a^2 - 6a - 20$.

3. a) $3x^2-27$; b) $5x^3y^4-45xy^2$; c) $36(a+1)^2-49a^2$.

4. a) $(x-y-z)^2-(x+y)^2$; b) $(a^2-2a+1)^2-(a^2+3a-4)^2$.

5. a) $25a^2-20a+4$; b) $12x^2-36x+27$; c) $a^4b-4a^3b^2+4a^2b^3$.

6. a) $1-8a^3$; b) $x^3y^3+27z^3$; c) $8(a+1)^3+27(a-3)^3$

7. a) $a^2-b^2-c^2+2bc$; b) $-3x^2+6x+9$; c) $(a^2+a+4)^2+8a(a^2+a+4)+15a^2$.

8. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

9. a) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$; b) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$.

10. Naći najmanju vrijednost izraza:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10.$$

Rastaviti na proste faktore (**11-20**):

11. $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.

12. $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

13. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$.

14. $4x^2y^2(2x+y)+y^2z^2(z-y)-4z^2x^2(2x+z)$.

15. $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc$.

16. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.

17. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

18. x^3+5x^2+3x-9.

19. $y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$.

20. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$.

21. Dokazati jednakosti:

a) $(2+xy+x+y)^2+(2-xy+x-y)^2=2(x+2)^2+2y^2(x+1)^2$;

b) $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)$

$$=(x+y+z)^3-4(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+4(x^3+y^3+z^3).$$

22. Odrediti a i b tako da polinom $x^4-9x^3+21x^2+ax+b$ bude djeljiv sa x^2-x-2.

23. Odrediti a i b tako da polinom x^3+ax^2+bx-5 bude djeljiv sa x^2+x+1.

24. Rastaviti polinom x^3+4x^2+6x+4 po stepenima $x+1$.

25. Rastaviti polinom $2x^3-12x^2+27x-19$ po stepenima $x-2$.

26. Naći zbir koeficijenata polinoma:

a) $(x^{27}-5x^2+10x-5)^4\cdot(2x-3)^3\cdot(3x^2+4)^2$,

b) $(6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+x-2)^{1995}$, c) $(x^3-2x+2)^{35}\cdot(x^2-5x+3)^{18}$.

27. Naći uvjete pod kojima je izraz

$$a^{m-1}+a^{m-2}+...+a+1$$

djeljiv izrazom

$$a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1,$$

gdje su m i n prirodni brojevi.

28. Polinom $a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m$ s cijelim koeficijentima $a_0,a_1,...,a_m$ djeljiv je sa $x-a$, gdje je a cio broj. Dokazati da zbir svih njegovih koeficijenata ima djelilac cijeli broj $a-1$.

1.2 Racionalne funkcije

Definicija 1.2.1 *Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oblika*

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\qquad (Q(x)\neq 0),$$

pri čemu su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi, zove se ***racionalnom funkcijom*** *jedne promjenljive.*

Vrlo često se promatraju i racionalne funkcije s više promjenljivih. Općenito se sve takve funkcije (i s jednom i s više promjenljivih) nazivaju *racionalnim algebarskim izrazima.* Npr.

$$\frac{x+2}{2x-1}\quad\left(x\neq\frac{1}{2}\right),\ \frac{3xy+2x}{x-y}\quad(x\neq y)\,,\ \frac{a^2-3ab^2+5b^4}{a^2+ab+b^2}\quad(a\neq 0,\ b\neq 0)$$

su racionalni algebarski izrazi.

Definicija 1.2.2 *Neka su P i Q nenulti polinomi. Za polinom R kažemo da je zajednički sadržalac polinoma P i Q ako su oba ta polinoma njegovi djelitelji.* ***Najmanjim zajedničkim sadržaocem (*NZS*)*** *polinoma P i Q nazivamo polinom S koji je njihov zajednički sadržalac i koji je djelitelj bilo kojeg drugog sadržaoca tih polinoma.*

Na sličan način se definira najmanji zajednički sadržalac za više od dva polinoma.

Da bi se praktično odredio NZS za polinome neophodno je te polinome prvo rastaviti na proste faktore. U NZS se uzimaju svi faktori koji se pojavljuju u bilo kojem od datih polinoma s najvećim od odgovarajućih stepena.

Primjer 1.2.1 *Naći NZS za sljedeće polinome:*
a) $P(x)=x^3+2x^2-x-2,\ Q(x)=x^2+2x-3;$
b) $(2x-1)(x+2)^2\left(x^2-x+1\right)^3,\ (2x-1)^3(x+4)\left(x^2-x+1\right)^2,$
$(2x-1)^2(x-6)\left(x^2-x+1\right);$
c) $a^4-b^4,\ a^3-b^3,\ a^3+b^3,\ a^2-b^2,\ a^2+b^2.$

Rješenje. a) Prvo izvršimo rastavljanje datih polinoma na proste faktore:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x-1)(x+1)\,, \\ Q(x) &= x^2+2x-3=x^2-x+3x-3=x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x+3)\,. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$NZS\,(P,Q) = (x-1)\,(x+1)\,(x+2)\,(x+3)\,.$$

b) $NZS = (2x-1)^3\,(x+2)^2\left(x^2-x+1\right)^3(x+4)\,(x-6)$

c) Kako je:

$$\begin{aligned} a^4-b^4 &= \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right) = (a-b)\,(a+b)\left(a^2+b^2\right), \\ a^3-b^3 &= (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right),\; a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right), \\ a^2-b^2 &= (a-b)\,(a+b)\,, \end{aligned}$$

imamo $NZS = (a-b)\,(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right).$ ♣

Kod racionalnih algebarskih izraza važno je voditi računa o definicionom području, tj. skupu svih vrijednosti promjenljivih veličina za koje je dati izraz definiran. Tu se, prije svega, misli na slučaj kada imamo operaciju dijeljenja i kada svi nazivnici moraju biti različiti od nule. Npr. izraz $\dfrac{x}{x+4}$ je definiran za $x+4\neq 0$, tj. $x\neq -4$, dok je izraz $\dfrac{2a+b}{a-b}$ definiran kad je $a\neq b$. O toj činjenici se strogo mora voditi računa pri izvođenju različitih transformacija racionalnih izraza. Tako je jednakost $\dfrac{(x+1)^3}{(x+1)^2} = x+1$ tačna samo u slučaju kad je $x\neq -1$. Naime, lijeva strana te jednakosti nema smisla za $x=-1$, iako desna ima. Prethodna se jednakost može promatrati i zdesna ulijevo. Uočavamo da i pri proširivanju razlomka moramo voditi računa da izraz kojim proširujemo ne smije biti nula. Zbog toga je na samom početku rješavanja zadatka s racionalnim izrazima potrebno odrediti definiciono područje i strogo voditi računa o izrazima kojima proširujemo ili skraćujemo razlomke. Također, uobičajeno je voditi računa o tome da se pri transformacijama racionalnih algebarskih izraza nastoji krajnji rezultat napisati u obliku neskrativog razlomka, to jest izraza oblika $\dfrac{P}{Q}$, gdje polinomi P i Q nemaju zajedničkih djelitelja.

Operacije s racionalnim funkcijama

Sabiranje i oduzimanje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) \pm P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)},\quad Q_1(x)\neq 0,\;\; Q_2(x)\neq 0.$$

Množenje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)\cdot P_2(x)}{Q_1(x)\cdot Q_2(x)},\qquad Q_1(x)\neq 0,\;\; Q_2(x)\neq 0.$$

Dijeljenje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} : \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)\cdot Q_2(x)}{Q_1(x)\cdot P_2(x)}, \quad Q_1(x)\neq 0,\ Q_2(x)\neq 0,\ P_2(x)\neq 0.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}} = \frac{P_1(x)\cdot Q_2(x)}{Q_1(x)\cdot P_2(x)}, \quad Q_1(x)\neq 0,\ Q_2(x)\neq 0,\ P_2(x)\neq 0.$$

Primjer 1.2.2

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{(x-2)+2x}{x\,(x-2)}=\dfrac{3x-2}{x\,(x-2)}$, *za* $x\neq 0,\ x\neq 2.$

b) $\dfrac{1}{a\,(a-b)\,(a-c)}-\dfrac{1}{b\,(c-b)\,(b-a)}+\dfrac{1}{c\,(c-a)\,(c-b)}$

$$=-\frac{1}{a\,(a-b)\,(c-a)}-\frac{1}{b\,(b-c)\,(a-b)}-\frac{1}{c\,(c-a)\,(b-c)}$$

$$=\frac{-bc\,(b-c)-ac\,(c-a)-ab\,(a-b)}{abc\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}=\frac{-b^2c+bc^2-ac^2+a^2c-a^2b+ab^2}{abc\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}$$

$$=\frac{-c^2\,(a-b)+c\left(a^2-b^2\right)-ab\,(a-b)}{abc\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}=\frac{(a-b)\left(-c^2+ca+cb-ab\right)}{abc\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}{abc\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)}=\frac{1}{abc},$$

za $a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a,\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0.$

c) $\left[\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}\right)\right]:\dfrac{x-y}{x}=\left[\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{1}{x+y}\dfrac{x^3-y^3}{xy}\right]:\dfrac{x-y}{x}$

$$=\frac{(x-y)\,(x+y)^2-(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{xy\,(x+y)}\cdot\frac{x}{x-y}$$

$$=\frac{(x-y)\left(x^2+2xy+y^2-x^2-xy-y^2\right)}{xy\,(x+y)}\cdot\frac{x}{x-y}$$

$$=\frac{(x-y)\,xy}{xy\,(x+y)}\cdot\frac{x}{x-y}=\frac{x}{(x+y)},\ za\ x\neq\pm y,\ x\neq 0,\ y\neq 0. \qquad \clubsuit$$

Primjer 1.2.3 *Odrediti vrijednost izraza*

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$$

ako za realne brojeve x, y *i* z *vrijedi* $xyz=1$.

Rješenje. Prvi razlomak proširimo sa z, a drugi prvo sa x, pa onda sa z:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx} \\
= & \frac{z}{z+xz+xyz}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{1}{1+z+zx} \\
= & \frac{z}{1+z+xz}+\frac{xz}{(x+xy+1)\,z}+\frac{1}{1+z+zx} \\
= & \frac{z}{1+z+xz}+\frac{xz}{xz+1+z}+\frac{1}{1+z+zx} \\
= & \frac{z+zx+1}{1+z+xz}=1. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

Primjer 1.2.4 *Ako je* $a^2+b^2=(a+b-c)^2\neq 0, b\neq c$, *dokazati da tada vrijedi*

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$$

Rješenje. Iz $a^2+b^2=(a+b-c)^2$ imamo:

$$a^2+b^2=(a-c)^2+2b\,(a-c)+b^2$$

odakle slijedi

$$a^2+(a-c)^2=2\,(a-c)^2+2b\,(a-c)=2\,(a-c)\,(a-c+b)\,, \tag{1.9}$$

odnosno

$$a^2+b^2=a^2+2a\,(b-c)+(b-c)^2$$

odakle slijedi

$$b^2+(b-c)^2=2a\,(b-c)+2\,(b-c)^2=2\,(b-c)\,(a+b-c) \tag{1.10}$$

Koristeći (1.9) i (1.10), dobijamo

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{2\,(a-c)\,(a-c+b)}{2\,(b-c)\,(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c}.$$

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

U zadacima **1-28** izvršiti naznačene operacije:

1. a) $\dfrac{2}{x^2-9}-\dfrac{4}{(x+3)^2}-\dfrac{1}{(3-x)^2}$; b) $\dfrac{4x^2}{6xy+9y^2}-\dfrac{9y^2}{4x^2+6xy}-\dfrac{2x}{3y}+\dfrac{3y}{2x}$.

2. a) $\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{3x-1}{x^2-9}+\dfrac{2x+6}{9-6x+x^2}$; b) $\dfrac{a^2-bx}{a^2-ab+bx-ax}-\dfrac{3b-a}{2a-2b}+\dfrac{a+2x}{3a-3x}$.

3. $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\dfrac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\dfrac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$.

4. $\dfrac{1}{a^2-3a+2}+\dfrac{1}{a^2-4}-\dfrac{2}{a^2-a-2}-\dfrac{1}{a^3-2a^2-a+2}$.

5. $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\dfrac{2}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

6. a) $\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{4a^2-a}{1-a^3}+\dfrac{1}{a^2+a+1}$; b) $\dfrac{x-3}{x^2+3x+9}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3x+2x^2}{x^3-27}$.

7. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}+\dfrac{16a^{15}}{a^{16}+b^{16}}$.

8. $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}+\dfrac{1}{(a+4)(a+5)}$.

9. a) $\left(a+b+\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}\right):\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$.

b) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right):\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

10. $\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right):\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right).$

11. $\left(\dfrac{3a}{9-3x-3a+ax}-\dfrac{1}{a^2-9}:\dfrac{x-a}{3a^2+9a}\right)\cdot\dfrac{x^3-27}{3a}.$

12. $\dfrac{\dfrac{2a}{a^2+2ab}+\dfrac{4b}{a^2-4b^2}-\dfrac{b}{ab-2b^2}}{1-\dfrac{a^2-4b^2-2}{a^2-4b^2}}.$

13. $\dfrac{1-\dfrac{x-3y}{x+y}}{\dfrac{3x+y}{x-y}-3}:\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}-\dfrac{1}{1-\dfrac{y}{x}}+\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}\right).$

14. $\left(\dfrac{1}{t^2+3t+2}+\dfrac{2t}{t^2+4t+3}+\dfrac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\cdot\dfrac{(t-3)^2+12t}{2}.$

15. $\left(2-x+4x^2+\dfrac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\dfrac{2x}{x-1}\right).$

16. $\dfrac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}.$

17. $\left[\left(\dfrac{x^2}{y^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right]:\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+\dfrac{y}{x}}.$

18. $\dfrac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\dfrac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{1+c}{c}\right):\dfrac{c\,(1+c)-a}{bc}.$

19. $\dfrac{\left[\dfrac{(a+x)^2}{ax}-4\right]\cdot\left[\dfrac{(a-x)^2}{ax}+4\right]:\left(a^6-x^6\right)}{\left(a^2x-ax^2\right):\left[(a+x)^2-ax\right]\cdot\left[(a-x)^2+ax\right]}\cdot\dfrac{a-\dfrac{ax}{a+x}}{a+\dfrac{ax}{a-x}}.$

20. $\dfrac{\dfrac{x}{8y^3}+\dfrac{1}{4y^2}}{x^2+2xy+2y^2}-\dfrac{\dfrac{x}{8y^3}-\dfrac{1}{4y^2}}{x^2-2xy+2y^2}-\dfrac{1}{4y^2\left(x^2+2y^2\right)}+\dfrac{1}{4y^2\left(x^2-2y^2\right)}.$

21. $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right).$

22. $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{y^2}{4x^2-y^2}.$

23. a) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\left(\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{b}{a+b}\right):\left[\left(a-2b+\dfrac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}\right)\right];$

b) Izračunati vrijednost datog izraza za $a=0,75, b=1\dfrac{1}{3}$.

24. $\dfrac{\left[ab\left(x^2+y^2\right)+xy\left(a^2+b^2\right)\right]\cdot\left[(ax+by)^2-4abxy\right]}{ab\left(x^2-y^2\right)+xy\left(a^2-b^2\right)}.$

25. $\dfrac{t^3+4t^2+10t+12}{t^3-t^2+2t+16}\cdot\dfrac{t^3-3t^2+8t}{t^2+2t+6}.$

26. $\dfrac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\dfrac{a^4+2a^3-a-2}{1+\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{a^2}}.$

27. $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)},\ (x\neq y,\ y\neq z,\ z\neq x).$

28. $\dfrac{a^2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}{\dfrac{a}{bc}(c-b)+\dfrac{b}{ca}(a-c)+\dfrac{c}{ab}(b-a)}.$

29. Ako je $a+b+c=0$, dokazati da vrijedi

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

30. Neka je $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. Dokazati da je tada

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

31. Dokazati da, ako je $a+x=1$, vrijedi

$$\frac{a}{x^3-1}-\frac{x}{a^3-1}=\frac{2\left(x-a\right)}{a^2x^2+3}.$$

32. Ako je $a+b+c=0$, dokazati jednakost

$$\left(\frac{a-b}{c^2}+\frac{b-c}{a^2}+\frac{c-a}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{c^2}{a-b}+\frac{a^2}{b-c}+\frac{b^2}{c-a}\right)=4abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3.$$

33. Odrediti A, B i C tako da za sve dozvoljene vrijednosti x vrijedi jednakost

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

34. Uprostiti izraz

$$\frac{x^3}{\left(x-y\right)\left(x-z\right)}+\frac{y^3}{\left(y-z\right)\left(y-x\right)}+\frac{z^3}{\left(z-x\right)\left(z-y\right)}.$$

35. Ako je

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \text{i} \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$

dokazati da vrijedi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Literatura

[1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin: *Zbirka zadataka iz elementarne matematike,* Zavod za izd. udžbenika, Sarajevo, 1972.

[2] V.T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz algebre za II razred gimnazije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd,1975.

[3] V.T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[4] V.T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 4*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd,2001.

[5] V. Dragović, A.Zolić, Z. Kaldeburg, S. Ognjanović: *Analiza sa algebrom 1 - udžbenik sa zbirkom zadataka za I razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1999.

[6] A. Hodžić, M. Nurkanović: *Zbirka zadataka sa regionalnih takmičenja iz matematike i kvalifikacioih ispita,* DMFA BiH - Podružnica Tuzla, Tuzla, 1989.

[7] Z. Kaldeburg, V. Mićić, S. Ognjanović: *Analiza sa algebrom 2 - udžbenik sa zbirkom zadataka za II razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 2002.

[8] S. Mintaković: *Zbirka riješenih zadataka iz matemaatike za drugi razred srednjeg usmjerenog obrazovanja,* Svjetlost, Sarajevo, 1989.

[9] S. Mintaković: *Zbirka zadataka iz algebre - II dio,* Svjetlost, Sarajevo, 1978.

[10] S. Mintaković: *Zbirka zadataka iz trigonometrije,* Svjetlost, Sarajevo, 1976.

[11] S. Mintaković: *Zbirka zadataka iz matemaatike za 3. razred srednjeg usmjerenog obrazovanja,* Svjetlost, Sarajevo, 1989.

[12] M. Mitrović i dr.: *Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije,* Krug, Beograd, 2000.

[13] M. Nurkanović, Z. Nurkanović: *Zbirka zadataka iz matematike za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima,* Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.

[14] V. Stojanovć: *Matematiskop 3 - Zbirka rešenih zadataka za prvi razred srednjih škola,* Matematiskop, Beograd, 1999.

[15] V. Stojanovć: *Matematiskop 7 - Matematika za maturante - priprema za upis na fakultet,* Matematiskop, Beograd, 1998.

[16] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar: *Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima, uputama i rezultatima,* Svjetlost, Sarajevo, 1987.

IZVODI IZ RECENZIJA

"... Jezik kojim se autori koriste je pravi matematički; korektan i jasan uz uvažavanje precizne moderne matematičke simbolike. Bilo mi je pravo zadovoljstvo čitati ovaj rukopis ...
Buduću knjigu ovih autora ću sa zadovoljstvom preporučiti mojim budućim studentima kao dio literature za spremanje ispita iz elementarne matematike kao i svima onima koji se budu pripremali za prijemne ispite iz matematike na raznim fakultetima u Sarajevu i šire, kao i za razna matematička takmičenja."

Dr. sc. Šefket Arslanagić, vanr. profesor
Odsjek za matematiku PMF Sarajevo

"... Autori su ispoljili visok nivo poznavanja materije koja je predmet rukopisa. Jezik kojim se autori koriste u rukopisu književno i matematički je korektan. Matematički simboli se upotrebljavaju korektno i samo tamo gdje je potrebno s matematičkog stanovišta.
... Imajući u vidu kompletan rukopis, smatram da će on naći veliki broj čitatelja (korisnika) među učenicima srednjih škola i njihovim nastavnicima kao i studentima tehničkih fakulteta."

Dr. sc. Hasan Jamak, vanr. profesor
Odsjek za matematiku PMF Sarajevo

* * *

Dr. sc. Mehmed Nurkanović je vanredni profesor, a Dr. sc. Zehra Nurkanović je docent na Odsjeku Matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli, Bosna i Hercegovina.

9 789958 130335