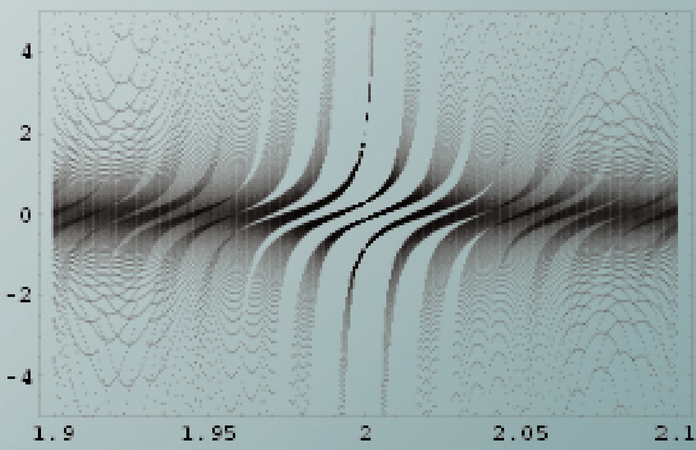
Mehmed Nurkanović

DIFERENTNE JEDNADŽBE

Teorija i primjene



Univerzitetski udžbenik

UDŽBENICI UNIVERZITETA U TUZLI
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM TUZLAENSIS

Prof. dr. sc. Mehmed Nurkanović

DIFERENTNE JEDNADŽBE
Teorija i primjene

Prvo izdanje

Tuzla, 2008.

Prof. dr. sc. Mehmed Nurkanović

DIFERENTNE JEDNADŽBE - Teorija i primjene

Recenzenti:
Dr. sc. Mustafa Kulenović, redovni profesor
University of Rhode Island, USA
Dr. sc. Senada Kalabušić, vanredni profesor
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu

Izdavač:
Denfas Tuzla

Direktor:
Suljo Hasanović

Korektura, kompjuterska obrada teksta i naslovna strana:
Autor

Crteži:
Dr. sc. Zehra Nurkanović, docent

Štampa:
Denfas Tuzla

Tiraž:
300 primjeraka

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

NURKANOVIĆ, Mehmed

Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene /
Mehmed Nurkanović. 1. izdanje - Tuzla:
Denfas, 2008. - 360 str. : graf. prikazi; 24 cm

Bibliografija: str. 353 - 357
ISBN
COBISS. BH - ID

Objavljivanje i upotrebu ovog udžbenika odobrio je Senat Univerziteta u Tuzli Odlukom broj 03-4830-4.2/07 od 10.07.2007. godine.

Supruzi Zehri i kćerkama Merimi i Ajli

PREDGOVOR

Diferentne jednadžbe se intenzivno proučavaju u posljednjih trideset godina, kako zbog značajnih matematičkih rezultata i teorija, tako i zbog velikih primjena u biologiji, fizici, ekonomiji, hemiji, društvenim naukama itd. Teorija diferentnih jednadžbi ima puno sličnosti, ali i dosta razlika, s teorijom diferencijalnih jednadžbi. Osnovna sličnost između te dvije teorije je na nivou linearnih jednadžbi. U područjima gdje se govore južnoslavenski jezici izučavanje teorije diferentnih jednadžbi je relativno novo, tako da ne postoje nikavi izvori koji bi obrađivali osnovnu teoriju diferentnih jednadžbi, kao i osnovne primjene, zato se s pravom može reći da je ovaj udžbenik prvi takve vrste.

Udžbenik je prvenstveno namijenjen studentima dodiplomskog i postdiplomskog studija prirodno-matematičkih fakulteta. Na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli, na Odsjeku matematika, njime je pokriven u cijelosti predmet *Diferentne jednadžbe* na drugoj godini dodiplomskog studija, a sa oko 50% pokriven je predmet *Diferentne jednadžbe i diskretni dinamički sistemi* na postdiplomskom studiju. Udžbenik je namijenjen i studentima tehničkih fakulteta, prvenstveno studentima elektrotehnike i mašin-stva, u predmetima u kojima se obrađuju teorija signala i teorija upravlja-nja. Također, udžbenik može koristiti i studentima bioloških smjerova koji su zainteresirani za matematičko modeliranje.

Osnovni tekst udžbenika je podijeljen u šest glava.

U prvoj glavi primjerima iz svakodnevnog života, biologije, radioaktivnosti i matematike, ilustrirana je prirodna pojava diferentnih jednadžbi u cilju da se naprave ti modeli.

Diferentni račun sistematski je obrađen u drugoj glavi. Uvedeni su pojmovi diferentnog, translacijskog i antidiferentnog operatora. Ovi operatori su mogući diskretni analogoni operatora diferenciranja i integriranja. Dokazani su osnovni teoremi koji govore o osobinama tih operatora, njihovim vezama i primjenama na rješavanje različitih matematičkih problema.

Diferentne jednadžbe prvog reda obrađene su u trećoj glavi. Posebna pažnja je posvećena njihovom rješavanju, ali se razmatra i pitanje stabilnosti. Tako su uvedeni pojmovi ekvilibrijuma, periodičnosti i stabilnosti ekvilibrijuma diferentnih jednadžbi prvog reda, a prezentirani su i osnovni rezutati linearizirane stabilnosti ekvilibrijuma. Na kraju poglavlja su dati zanimljivi primjeri iz medicine, ekonomije i matematike.

U četvrtoj glavi je prezentirana teorija linearnih diferentnih jednadžbi višeg reda. Osim četiri metoda za određivanje partikularnog rješenja nehomogene diferentne jeednadžbe, sistematski su razvijena i tri metoda za rješavanje linearnih diferentnih jednadžbi s promjenljivim koeficijentima. Također su izloženi i metodi za nelinearne diferentne jednadžbe kojima se ove jednadžbe svode na linearne. Posebna pažnja je posvećena tzv. Riccatijevoj diferentnoj jednadžbi kao najvažnijem predstavniku nelinearnih diferentnih jednadžbi prvog reda. Na kraju ove glave navedene su interesantne primjene na modele iz matematike, biologije, fizike, medicine, ekonomije i društvenih nauka.

Autonomni i neautonomni sistemi linearnih diferentnih jednadžbi i metodi za njihovo rješavanje razmatrani su u petoj glavi. Izloženi su osnovni rezultati o Jordanovoj normalnoj formi matrice. Razmatrani su slučajevi kada se odgovarajuća matrica može dijagonalizirati i kada to nije slučaj. Glava završava izborom zanimljivih modela u fizici, biologiji, ekonomiji i vojnim naukama.

Šesta glava je posvećena prezentaciji Z-transformacije, koja predstavlja jedan važan metod za rješavanje linearnih diferentnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Prednost ovog metoda je u tome što direktno rješava problem početnih vrijednosti, te je kao takav najefektniji metod koji se koristi za rješavanje raznih problema u elektrotehnici i mašinstvu. Detaljno je obrađena inverzna Z-tranformacija i metodi za njeno nalaženje, te izvršeno upoređivanje Z-transformacije i Laplaceove transformacije. Ova glava završava izborom zanimljivih modela iz elektrotehnike.

Treba istaknuti i činjenicu da se svaka glava završava izborom određenog broja problema, razvrstanih prema pojedinim sekcijama.

Recenzentima, prof. dr. sc. Mustafi Kulenoviću, redovnom profesoru na University of Rhode Island (USA) i prof. dr. sc. Senadi Kalabušić, vanrednom profesoru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu, najiskrenije zahvaljujem na uloženom velikom trudu i korisnim savjetimama koji su doprinijeli boljem kvalitetu udžbenika. Zahvalnost dugujem i svojoj supruzi doc. dr. sc. Zehri Nurkanović koja je uložila dosta truda pri izradi većine slika, koristeći software *Mathematica 5.0,* te na taj način doprinijela ljepšem i zanimljivijem izgledu knjige.

I pored svega, svjestan sam da postoje i neki propusti, pa se unaprijed zahvaljujem svim pažljivim čitaocima na argumentiranim primjedbama, koje mogu poslati na e-mail adresu: *mehmed.nurkanovic@untz.ba*.

Tuzla, februar 2008. godine

Autor

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Diferentne jednadžbe su, jednostavno rečeno, jednadžbe u kojima se kao nepoznanice javljaju funkcije definirane na nekom diskretnom skupu, odnosno funkcije čije se vrijednosti izračunavaju rekurzivno iz datog skupa vrijednosti. U slučaju kad je domen takvih funkcija skup prirodnih brojeva, onda su one ustvari nizovi, pa će se u diferentnim jednadžbama, koje su predmet proučavanja u ovoj knjizi, kao nepoznanice uglavnom pojavljivati nizovi. Veliki broj procesa koji se odvijaju oko nas (fizičkih, hemijskih, bioloških, ekonomskih, društvenih,...) mogu biti predstavljeni diskretnim modelima, koji su ili diferentna jednadžba ili sistem diferentnih jednadžbi. Uglavnom se ti procesi prate u diskretnom vremenu, za razliku od procesa za koje je bitno vrijeme u kontinuiranom smislu i koji se opisuju diferencijalnim jednadžbama.

Pimjeri koji slijede imaju za cilj da ilustriraju kako u stvarnosti nastaju diferentne jednadžbe i to u različitim sferama života. Mnogo više takvih primjera biće navedeno kasnije u poglavljima koja slijede.

Obračun kamate

Jedna od najčešćih situacija u životu savremenog čovjeka jeste raspolaganje novcem. Skoro svaki čovjek ima otvoren račun u banci, a poznato je da se na uložena sredstva obračunava kamata. Budući da se kamata obračunava u diskretnom vremenu, jasno je da će se ovdje pojaviti diskretni model, za kojeg ćemo vidjeti da se opisuje diferentnom jednadžbom.

Pretpostavimo da smo uložili €500 u banku, gdje se kamata zaračunava mjesečno po godišnjoj stopi od 6%. Dajmo odgovore na sljedeća pitanja:

i) Koliko ćemo novca imati u banci nakon 10 godina?

ii) Koliko vremena treba proći od momenta ulaganja pa da se uloženi novac udvostruči?

Neka je I_n iznos novčanog uloga nakon n-tog mjeseca. Tada je $I_0 = 500$. Nakon $(n+1)$-og mjeseca ulog iz prethodnog mjeseca će biti uvećan za iznos kamate obračunate na ulog I_n, to jest

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + 0,005 I_n \\ &= 1,005 I_n, \end{aligned}$$

za $n = 0, 1, 2, ...$ (što je diferentna jednadžba, jer je u njoj nepoznanica niz I_n).

Očito je sada

$$\begin{aligned} I_n &= 1,005 I_{n-1} \\ &= (1,005)^2 I_{n-2} \\ &\vdots \\ &= (1,005)^n I_0 \\ &= (1,005)^n \cdot 500. \end{aligned}$$

i) Nakon 10 godina, to jest 120 mjeseci, iznos uloženog novca s kamatama je

$$\begin{aligned} I_{120} &= (1,005)^{120} \cdot 500 \\ &= 909,70 \ \ (€)\,. \end{aligned}$$

ii) Iz jednadžbe

$$I_n = 2I_0 = (1,005)^n I_0$$

slijedi

$$n = \frac{\log 2}{\log 1,005} = 139,$$

dakle, za 139 mjeseci, ili za 1,6 godina, uloženi novac će se udvostručiti.

Populacioni model

Promatrajmo jednu populaciju čija veličina je poznata na diskretnom skupu vremenskih intervala $t_n = (\Delta t)\, n$, gdje je Δt fiksiran interval, a n je nenegativan cio broj. Označimo veličinu populacije u vremenu t_n sa P_n.

Pretpostavimo sada , dok je populacija mala, da je promjena populacije od vremena t_n do t_{n+1} data sa

$$P_{n+1} = \alpha P_n, \tag{1.1}$$

gdje je α pozitivna konstanta. Dalje, pretpostavimo da u velikim veličinama populacije postoji kompeticija među članovima populacije (za hranu i druge resurse). Ova kompeticija može se modelirati dodavanjem jednakosti (1.1) člana oblika $-\beta P_n\,(P_n - 1)$, gdje je $\beta > 0$. Grubo, ovo znači da je veličina kompeticije proporcionalna ukupnom broju mogućih interakcija među članovima populacije i da kompeticija ima negativan efekat na rast populacije. Kombiniranjem, ova dva rezultata daju sljedeću populacionu dinamičku jednadžbu

$$P_{n+1} = \alpha P_n - \beta P_n\,(P_n - 1)\,,$$

ili

$$P_{n+1} = (\alpha + \beta)\, P_n - \beta P_n^2.$$

Koeficijent $\alpha + \beta$ je efektiv ili neto ”stopa rađanja”, dok je β mjera kompeticije. Uočimo da je α stopa rađanja u odsustvu kompeticije. Iz ovog jednostavnog modela možemo zaključiti da, kad se javlja kompeticija, onda raste neto stopa rađanja.

Radioaktivnost

Pokazaćemo sada kako se proces raspada radioaktivne supstance može predstaviti diskretnim modelom, budući da se u ovakvim situacijama proces može pratiti u diskretnom vremenu (u ovom slučaju svakog sata).

Poznato je da je količina radioaktivnog izotopa olova Pb-209 na kraju svakog sata proporcionalna zatečenoj količini na početku sata. Ako je vrijeme poluraspada olova Pb-209 3,3 sata, može se, recimo, postaviti pitanje: za koliko vremena će količina olova Pb-209 opasti za 20%?

Označimo sa m_n količinu olova Pb-209 na kraju n-tog sata. Prema uvjetima zadatka imamo

$$m_{n+1} = \alpha m_n,$$

gdje je α koeficijent proporcionalnosti (koji je pozitivan). Kao i u slučaju obračuna kamate, i ovdje zaključujemo da je

$$m_n = \alpha^n m_0.$$

Budući da je period poluraspada olova Pb-209 jednak 3,3 sata, iz posljednje jednadžbe dobijamo

$$\frac{1}{2} m_0 = \alpha^{3,3} m_0,$$

odakle slijedi da je

$$\alpha = e^{-\frac{\ln 2}{3,3}}.$$

Zbog toga je

$$\frac{4}{5} m_0 = \left(e^{-\frac{\ln 2}{3,3}}\right)^n m_0,$$

odakle, konačno, imamo

$$n = 1,06.$$

dakle, nakon 1,06 sati količina olova će pasti za 20%.

Gama funkcija

Jedna od specijalnih (dakle, neelementarnih) funkcija u matematici je tzv. gama funkcija $\Gamma(z)$, koja se definira kao

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

ako je $\mathrm{Re}(z) > 0$. Ova funkcija igra vrlo značajnu ulogu u matematici, a i u ovoj knjizi će se spominjati i kasnije. Za nas je, u ovom trenutku, ona zanimljiva iz razloga što zadovoljava određenu funkcionalnu, odnosno diferentnu jednadžbu. Naime, formalnom primjenom parcijalne integracije, dobija se

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt \\
&= \left[-e^{-t} t^z\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt \\
&= z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Uočimo da ovdje nezavisno promjenljiva nije ograničena na diskretne vrijednosti. Ako je vrijednost od $\Gamma(z)$ poznata za neko z takvo da je $\operatorname{Re}(z) \in (0,1)$, tada možemo izračunati $\Gamma(z+1), \Gamma(z+2), \ldots$ rekurzivno. Osim toga, ako dobijenu diferentnu jednadžbu napišemo u obliku

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

$\Gamma(z)$ može biti data korištenjem vrijednosti za sve z, čiji je realni dio manji ili jednak nuli, izuzev $z = 0, -1, -2, \ldots$.

Lahko se zaključuje sljedeće:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1, \\
\Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2, \\
\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3!, \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.
\end{aligned}$$

Diferentne jednadžbe pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi

Ovdje ćemo demonstrirati primjer pojave diferentnih jednadžbi pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi pomoću redova.

Promatrajmo diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 3xy' + 3y = 0.$$

Potražimo jedno rješenje date jednadžbe u obliku stepenog reda

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{1.2}$$

pri čemu su a_n $(n = 0, 1, \ldots)$ koeficijenti koje treba odrediti. Tako imamo

$$xy' = x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) a_{n-2} x^{n-2},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2},$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}.$$

Zamjenom tih izraza u datu diferencijalnu jednadžbu, dobijamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n\,(n-1)\,a_n + 3\,(n-1)\,a_{n-2}\right] x^{n-2} = 0.$$

Odavdje slijedi da svaki koeficijent dobijenog reda mora biti jednak nuli, to jest

$$n\,(n-1)\,a_n + 3\,(n-1)\,a_{n-2} = 0, \qquad n = 2, 3, ...,$$

odnosno

$$na_n + 3a_{n-2} = 0,$$

što je diferentna jednadžba. Rješavanjem ove jednadžbe dobija se konkretan izgled stepenog reda (1.2), te nakon utvrđivanja područja konvergencije, moguće je zaključiti o kojoj je funkciji riječ, koja ustvari predstavlja sumu dobijenog reda.

Zadaci za samostalan rad

1.1 *Poznato je da je do 1626. godine Manhattan bio u posjedu Algonchuan Indijanaca. Te godine gosp. Peter. Minuit ga je kupio od njih. U 17. stoljeću Indijance nije zanimao novac, pa je kupnja Manhattana predstavljala klasičnu trampu. U zamjenu za zemljište od približno* $31,2$ *kvadratnih milja Indijancima je dao odjeću, perle i neke druge drangulije. Ukupna vrijednost te robe u trenutku trampe iznosila je* 60 *nizozemskih guildera, odnosno* $\$24$.

Vjeruje se da je Peter Minuit premalo platio za dato zemljište, stoga provjerite ovu tvrdnju s jednog drugog aspekta. Ako su se ta $\$24$ *mogla oročiti u banci po kamatnoj stopi od* 7%, *računajući kvartalno, s kolikom količinom novca bi Minuitovi nasljednici danas raspolagali i kakav je odnos te količine novca s trenutnom vrijednosti Manhattana, ako se zna da je danas srednja vrijednost* m^2 *na Manhattanu oko* $\$3500$ *?*

1.2 *Populacija u jednom gradu na kraju svake godine je proporcionalna veličini populacije na početku te godine. Ako je populacija rasla sa 50 000 u 1980. godini na 70 000 u 1990. godini, koja će veličina populacije biti 2010. godine?*

1.3 *Neko tijelo temperature* $80°F$ *smješteno je u vremenu* $t = 0$ *u veliku posudu s vodom s konstantnom temperaturom* $80°F$. *Nakon 20 minuta temperatura tijela je* $70°F$. *Eksperimenti pokazuju da je na kraju svake minute razlika u temperaturi između tijela i vode proporcionalna razlici na početku te minute. Kolika će biti temperatura tijela nakon 10 minuta ? Kada će tijelo imati temperaturu* $60°F$ *?*

1.4 *Dokazati da za svaki prirodni broj* n *vrijedi jednakost*

$$2^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1.$$

1.5 *Eksponencijalni integral* $E_n(x)$ *je definiran kao*

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}dt, \qquad (x>0),$$

gdje je n *prirodni broj. Pokazati da* $E_n(x)$ *zadovoljava diferentnu jednadžbu*

$$nE_{n+1}(x) + xE_n(x) - e^{-x} = 0.$$

1.6 *Koristeći metod stepenih redova, naći jedno rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' - xy = 0.$$

Glava 2

Diferentni račun

Kao što u rješavanju i analizi diferencijalnih jednadžbi značajnu ulogu igra *diferencijalni i integralni račun*, tako isto u rješavanju i analizi (posebno linearnih) diferentnih jednadžbi vrlo značajno mjesto zauzima *diferentni račun*, koji predstavlja diskretni analogon diferencijalnog i integralnog računa. U ovoj sekciji nastojaćemo dati kratak pregled nekih tehnika diferentnog računa, ali i ukratko ukazati na sličnosti i razlike sa diferencijalnim računom.

2.1 Diferentni operator

U diferentnom računu bitna su dva operatora, koja ćemo definirati i za koje ćemo navesti neke osnovne osobine. Riječ je o *diferentnom (diferencijskom) operatoru* i *translacijskom operatoru.*

Definicija 2.1 *Neka je $x(t)$ funkcija realne ili kompleksne promjenljive t.* ***Diferentni operator*** *(ili razliku prvog reda) definiramo jednakošću*

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t). \tag{2.1}$$

Uglavnom ćemo u budućim primjenama smatrati da je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, kao npr. skup $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. U tom slučaju promjenljivu t zamijenićemo oznakom n, a izraz $x(n)$ sa x_n, pa ćemo jednakost (2.1) pisati u obliku

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Međutim, u ovoj sekciji mi ćemo uglavnom, zbog općenitosti, za domen funkcije x uzimati neki neprekidni skup vrijednosti promjenljive t, kao što je interval $[0, +\infty)$ ili kao što je kompleksna ravan.

Uočimo da veličina koraka od jedne jedinice, korišten u definiciji, realno gledajući nije nikava restrikcija. Naime, promatramo li diferentni operator $y(s+h) - y(s)$, s veličinom koraka $h > 0$, i uvedemo li smjenu $x(t) = y(th)$, imaćemo

$$y(s+h) - y(s) = y(th+h) - y(th) = x(t+1) - x(t) = \Delta x(t).$$

Također, uočimo da se diferentni operator može primjenjivati i na funkcije dvije ili više promjenljivih, ali je potrebno u indeksu operatora naznačiti koja će varijabla biti translatirana za jednu jedinicu. Na primjer,

$$\Delta_t \left(t^2 \cdot 2^n\right) = (t+1)^2 \cdot 2^n - t^2 \cdot 2^n = (2t+1) \cdot 2^n,$$

dok je

$$\Delta_n \left(t^2 \cdot 2^n\right) = t^2 \cdot 2^{n+1} - t^2 \cdot 2^n = t^2 \cdot 2^n.$$

Razlike višeg reda uobičajeno se definiraju pomoću kompozicije diferentnog operatora sa samim sobom. Tako je razlika drugog reda

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(t) &= \Delta(\Delta x(t)) = \Delta(x(t+1) - x(t)) \\ &= (x(t+2) - x(t+1)) - (x(t+1) - x(t)) \\ &= x(t+2) - 2x(t+1) + x(t). \end{aligned}$$

Općenito, razlika reda n definira se indukcijom:

$$\Delta^n x(t) = \Delta\left(\Delta^{n-1} x(t)\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

te zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} \Delta^n x(t) &= x(t+n) - nx(t+n-1) + \tfrac{n(n-1)}{2} x(t+n-2) + .. + (-1)^n x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x(t+n-k). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definicija 2.2 ***Translacijski operator*** *(ili shift operator) definiramo jednakošću*

$$Ex(t) = x(t+1). \tag{2.3}$$

U slučaju da je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, formula (2.3) može se pisati u obliku

$$Ex_n = x_{n+1}.$$

Ako sa I označimo identični operator, to jest $I(t) \equiv t$, tada očigledno imamo

$$\Delta = E - I, \tag{2.4}$$

odnosno

$$E = \Delta + I. \tag{2.5}$$

Relacije (2.4) i (2.5) vrlo su značajne i koriste se kada jedan od dva operatora, Δ ili E, treba izraziti preko onog drugog. Tako jednostavnije (koristeći binomnu formulu i relaciju (2.4)) možemo doći do relacije (2.2):

$$\begin{aligned} \Delta^n x(t) &= (E-I)^n x(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^k E^{n-k} x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x(t+n-k). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Slično, korištenjem formule (2.5), dobijamo relaciju

$$\begin{aligned} E^n x(t) &= (\Delta + I)^n x(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^k \Delta^{n-k} x(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} x(t). \end{aligned}$$

Osim toga, vrijedi zanimljiva osobina da operatori Δ i E međusobno komutiraju, to jest vrijedi

$$\Delta E x(t) = E \Delta x(t)$$

(što ostavljamo čitaocu da dokaže za vježbu, v. zad. 1.1).

Nije teško uočiti da su oba operatora, Δ i E, linearni operatori. U slučaju operatora Δ slijedi to iz osnovnih osobina tog operatora navedenih pod 2° i 3° u narednom teoremu.

Teorem 2.1

1° $\Delta^n\left(\Delta^m x(t)\right)=\Delta^m\left(\Delta^n x(t)\right)=\Delta^{m+n}x(t)$, *za sve pozitivne cijele brojeve* m *i* n.

2° $\Delta\left(x(t)+y(t)\right)=\Delta x(t)+\Delta y(t)$.

3° $\Delta\left(Cx(t)\right)=C\Delta\left(x(t)\right)$, *ako je* C *konstanta.*

4°
$$\begin{aligned}\Delta\left(x(t)\,y(t)\right)&=x(t)\,\Delta y(t)+Ey(t)\,\Delta x(t)\\&=y(t)\,\Delta x(t)+Ex(t)\,\Delta y(t)\\&=x(t)\,\Delta y(t)+y(t)\,\Delta x(t)+\Delta x(t)\,\Delta y(t).\end{aligned}$$

5° $\Delta\left(\dfrac{x(t)}{y(t)}\right)=\dfrac{y(t)\,\Delta x(t)-x(t)\,\Delta y(t)}{y(t)\,Ey(t)}$.

Dokaz. Prve tri osobine jednostavno se dokazuju (što prepuštamo čitaocu za vježbu). Dokažimo sada prvu od jednakosti u osobini 4° :

$$\begin{aligned}\Delta\left(x(t)\,y(t)\right)&=x(t+1)\,y(t+1)-x(t)\,y(t)\\&=x(t+1)\,y(t+1)-x(t)\,y(t+1)+x(t)\,y(t+1)-x(t)\,y(t)\\&=y(t+1)\left(x(t+1)-x(t)\right)+x(t)\left(y(t+1)-y(t)\right)\\&=Ey(t)\,\Delta x(t)+x(t)\,\Delta y(t).\end{aligned}$$

Jednakost 5° dokazuje se na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)&=\frac{x(t+1)}{y(t+1)}-\frac{x(t)}{y(t)}=\frac{x(t+1)\,y(t)-x(t)\,y(t+1)}{y(t+1)\,y(t)}\\&=\frac{x(t+1)\,y(t)-x(t)\,y(t)+x(t)\,y(t)-x(t)\,y(t+1)}{y(t+1)\,y(t)}\\&=\frac{y(t)\left(x(t+1)-x(t)\right)-x(t)\left(y(t+1)-y(t)\right)}{y(t+1)\,y(t)}\\&=\frac{y(t)\,\Delta x(t)-x(t)\,\Delta y(t)}{y(t)\,Ey(t)}.\end{aligned}$$

■

Primjedba 2.1 *Osobina* 4° *se može poopćiti i za slučaj razlike* n*-tog reda, te dobiti tzv.* ***Leibnitzovu formulu*** *za razlike (diferencije):*

$$\Delta^n\left(x(t)\,y(t)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\Delta^k x(t)\right)\left(\Delta^{n-k}y(t+k)\right). \tag{2.7}$$

Zaista, definirajmo operatore E_1 i E_2 koji djeluju, respektivno, na $x(t)$ i $y(t)$, to jest

$$E_1 (x(t)\, y(t)) = x(t+1)\, y(t)\,, \qquad E_2 (x(t)\, y(t)) = x(t)\, y(t+1)\,.$$

Iz jednakosti

$$E_1 E_2 (x(t)\, y(t)) = x(t+1)\, y(t+1)\,,$$

slijedi da je $E = E_1 E_2$. Definirajmo još i operatore Δ_1 i Δ_2 tako da vrijedi

$$\Delta_i = E_i - I \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Zbog toga je

$$\Delta = E - I = E_1 E_2 - I = (I + \Delta_1) E_2 - I = E_2 + \Delta_1 E_2 - I = \Delta_2 + \Delta_1 E_2$$

i

$$\Delta^n (x(t)\, y(t)) = (\Delta_2 + \Delta_1 E_2)^n (x(t)\, y(t))\,.$$

Koristeći binomni razvoj, konačno dobijamo

$$\begin{aligned}
\Delta^n (x(t)\, y(t)) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_2^{n-k} \Delta_1^k E_2^k \right) (x(t)\, y(t)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_2^{n-k} \Delta_1^k x(t)\, y(t+k) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_2^{n-k} \right) (E_1 - I)^k\, x(t)\, y(t+k) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_2^{n-k} \right) y(t+k)\, (E - I)^k\, x(t) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_2^{n-k} \right) y(t+k)\, \Delta^k x(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\Delta^k x(t) \right) \left((E_2 - I)^{n-k}\, y(t+k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\Delta^k x(t) \right) \left((E - I)^{n-k}\, y(t+k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\Delta^k x(t) \right) \left(\Delta^{n-k} y(t+k) \right).
\end{aligned}$$

Navedimo sada neke formule za izračunavanje diferencija nekih posebnih funkcija (nešto što podsjeća na tablicu izvoda osnovnih funkcija).

Teorem 2.2 *Neka je a konstanta. Tada vrijedi*

1° $\Delta a = 0.$

2° $\Delta a^t = (a-1)\,a^t.$

3° $\Delta \sin at = 2\sin\frac{a}{2}\cos a\left(t+\frac{1}{2}\right).$

4° $\Delta \cos at = -2\sin\frac{a}{2}\sin a\left(t+\frac{1}{2}\right).$

5° $\Delta \log at = \log\left(1+\frac{1}{t}\right).$

6° $\Delta \log\Gamma(t) = \log t.$

(Ovdje $\log t$ predstavlja logaritam za bilo koju bazu.)

Dokaz. Prvih pet osobina se jednostavno dokazuju.

6° $\Delta\log\Gamma(t) = \log\Gamma(t+1) - \log\Gamma(t) = \log\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)} =$

$$= \log\frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t)} = \log t. \ \blacksquare$$

Formule iz prethodna dva teorema uglavnom se koriste da bi se odredila diferencija kompliciranijih izraza. Međutim, u nekim slučajevima je jednostavnije to uraditi direktno po definiciji.

Primjer 2.1 *Izračunati* $\Delta\,\mathrm{tg}\,t$.

Rješenje. Korištenjem osobine izračunavanja diferencije količnika i osobina izračunavanja diferencije funkcija $\cos at$ i $\sin at$ (to jest osobine 5° Teorema 2.1 i osobina 3° i 4° Teorema 2.2), imamo

$$\begin{aligned}
\Delta\tan t &= \Delta\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{(\cos t)(\Delta\sin t) - \sin t\cdot(\Delta\cos t)}{\cos t\cos(t+1)} \\
&= \frac{2\sin\frac{1}{2}\cos\left(t+\frac{1}{2}\right)\cos t - \sin t\left(-2\sin\frac{1}{2}\sin\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)}{\cos t\cos(t+1)} \\
&= \frac{2\sin\frac{1}{2}\left[\cos\left(t+\frac{1}{2}\right)\cos t + \sin\left(t+\frac{1}{2}\right)\sin t\right]}{\cos t\cos(t+1)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\cos\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)-t\right]}{\cos t\cos(t+1)} \\
&= \frac{2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}{\cos t\left(\cos t\cos 1 - \sin t\sin 1\right)} = \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{\sin 1}{\cos 1 - \tan t\sin 1} \\
&= \sec^2 t\frac{\tan 1}{1-\tan 1\tan t}.
\end{aligned}$$

S druge strane, do istog se rezultata moglo brže doći korištenjem definicije diferencije:

$$\begin{aligned}
\Delta \tan t &= \tan(t+1) - \tan t = \frac{\sin(t+1)}{\cos(t+1)} - \frac{\sin t}{\cos t} \\
&= \frac{\sin(t+1)\cos t - \cos(t+1)\sin t}{\cos t \cos(t+1)} = \frac{\sin[(t+1)-t]}{\cos t\,(\cos t \cos 1 - \sin t \sin 1)} \\
&= \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{\sin 1}{\cos 1 - \tan t \sin 1} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{\sin 1}{\cos 1 - \tan t \sin 1} \\
&= \sec^2 t \frac{\tan 1}{1 - \tan 1 \tan t}. \qquad \clubsuit
\end{aligned}$$

Do sada smo se zaista mogli uvjeriti u određenu sličnost između diferentnog računa s jedne strane i diferencijalnog računa s druge strane. Navedimo, stoga, još neke osobine diferencija koje su slične odgovarajućim osobinama operatora iz diferencijalnog i integralnog računa. Prije svega, ovdje se misli na diskretne analogone fundamentalnih teorema diferencijalnog i integralnog računa:

(i) $\int\limits_a^b df(x) = f(b) - f(a)$,

(ii) $d\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$.

Naime, vrijedi sljedeći

Teorem 2.3

$$1^\circ \qquad \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_{n_0}, \tag{2.8}$$

$$2^\circ \qquad \Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x_k\right) = x_n. \tag{2.9}$$

Dokaz. 1° $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)$

$$= (x_{n_0+1} - x_{n_0}) + (x_{n_0+2} - x_{n_0+1}) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_{n_0},$$

$$2^\circ \qquad \Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x_k\right) = \sum_{k=n_0}^{n} x_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} x_k = x_n. \quad \blacksquare$$

Postoji i treća, vrlo značajna sličnost, između diferentnog operatora Δ i derivacionog operatora D. Naime, neka je

$$P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k$$

polinom stepena k. Tada je

$$\begin{aligned}\Delta P_k(n) &= \Big[a_0 (n+1)^k + a_1 (n+1)^{k-1} + ... + a_k\Big] - \left[a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k\right] \\ &= a_0 k n^{k-1} + \ \textit{članovi stepena manjeg od}\ \ (k-1).\end{aligned}$$

Slično se može pokazati da je

$$\Delta^2 P_k(n) = a_0 k (k-1) n^{k-2} + \ \textit{članovi stepena manjeg od}\ \ (k-2).$$

Nastavljajući ovaj postupak k puta, dobije se

$$\Delta^k P_k(n) = a_0 k!\ , \tag{2.10}$$

odnosno

$$\Delta^{k+i} P_k(n) = 0 \quad \text{za} \quad i \geq 1. \tag{2.11}$$

Slično se razmatranje može sprovesti i u slučaju operatora E.

Neka je sada

$$P_k(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + ... + a_k I. \tag{2.12}$$

Tada je

$$\begin{aligned}P_k(E)\, b^n &= \Big(a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + ... + a_k I\Big)\, b^n = a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + ... + a_k b^n \\ &= b^n \Big(a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + ... + a_k\Big) = b^n P_k(b).\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi formula

$$P_k(E)\, b^n = b^n P_k(b). \tag{2.13}$$

No, formula (2.13) se može generalizirati. Naime, vrijedi

Teorem 2.4 *Neka je $P_k(E)$ polinom dat sa (2.12) i neka je $g(n)$ neka diskretna funkcija. Tada vrijedi*

$$P_k(E)\,(b^n g(n)) = b^n P_k(bE)\, g(n). \tag{2.14}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
P_k(E)(b^n g(n)) &= \left(a_0E^k + a_1E^{k-1} + ... + a_kI\right)(b^n g(n)) \\
&= a_0b^{n+k}g(n+k) + a_1b^{n+k-1}g(n+k-1) + ... + a_kb^n g(n) \\
&= b^n\left(\left(a_0b^k\right)E^k g(n) + \left(a_1b^{k-1}\right)E^{k-1}g(n) + ... + a_kg(n)\right) \\
&= b^n\left(a_0\left(b^kE^k\right)g(n) + a_1\left(b^{k-1}E^{k-1}\right)g(n) + ... + a_kIg(n)\right) \\
&= b^nP_k(bE)\,g(n).
\end{aligned}$$

■

Znamo da u diferencijalnom računu vrijedi

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}. \tag{2.15}$$

Nažalost, diferencija stepena je komplicirana i kao rezultat nije mnogo upotrebljiva:

$$\begin{aligned}
\Delta_t t^n &= (t+1)^n - t^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k - t^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}t^k.
\end{aligned}$$

No, ipak je moguće doći do formule za diferencije koja je analogna formuli (2.15), ali je, umjesto stepene funkcije t^n, potrebno uvesti jednu posebnu funkciju. Upravo sljedeća definicija uvodi takvu funkciju, koja će, dakle, zadovoljiti neku verziju uloge stepene funkcije za konačne razlike.

Definicija 2.3 ***Stepen padajućeg faktorijela*** $t^{(r)}$ *(čita se "t na r padajući") definiramo, u ovisnosti o vrijednostima varijable r, na sljedeći način:*

1° *Ako je $r = 1, 2, 3, ...,$ tada $t^{(r)} = t(t-1)\cdots(t-r+1)$.*

2° *Ako je $r = 0$, tada $t^{(0)} = 1$.*

3° *Ako je $r = -1, -2, -3, ...,$ tada $t^{(r)} = \dfrac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-r)}$.*

4° *Ako r nije cio broj, tada $t^{(r)} = \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$.*

Naravno, gornja definicija od $t^{(r)}$ podrazumijeva samo one vrijednosti varijabli t i r za koje odgovarajuća formula ima smisla. Tako, očigledno, izraz $(-1)^{-2}$ nije uopće definiran zbog egzistencije vrijednosti 0 jednog od faktora u nazivniku razlomka. Isto tako, ni izraz $\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{4}{3}\right)}$ nema smisla, jer mu nazivnik $\Gamma(0)$ nije definiran.

Uočimo da su slučajevi 1°, 2° i 3° samo specijalni slučajevi formule u 4°, ako se za r uzmu odgovarajuće vrijednosti, vodeći samo pri tome računa da se isključe one diskretne vrijednosti promjenljive t za koje gama funkcija nije definirana. Uvjerimo se u to prvo u slučaju kad je $r \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} &= \frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)} = \frac{t(t-1)\Gamma(t-1)}{\Gamma(t-r+1)} = \dots = \\ &= \frac{t(t-1)\cdots(t-r+1)\Gamma(t-r+1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= t(t-1)\cdots(t-r+1) = t^{(r)}.\end{aligned}$$

U slučaju kad je $r \in \{-1,-2,-3,...\}$, imamo

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} &= \frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)\Gamma(t-r)} = \frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)(t-r-1)\Gamma(t-r-1)} = \dots = \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)(t-r-1)\cdots(t-r-(-r-1))\Gamma(t-r-(-r-1))} \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)(t-r-1)\cdots(t+1)\Gamma(t+1)} \\ &= \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-r)} = t^{(r)}.\end{aligned}$$

Uzmemo li u Definiciji 2.3 $t = r = n \in \mathbb{N}$, dobijamo

$$n^{(n)} = n! \quad ,$$

što daje opravdanje za upotrebu termina faktorijel u definiciji. S druge strane, ako je $t \in \mathbb{R}$ i $r = k \in \mathbb{N}$, broj $t^{(k)}$ se obično naziva *faktorijelski polinom* . Konačno, ako uzmemo $t = n \in \mathbb{N}$, $r = k \in \mathbb{N}$ i $n \geq k$, broj $n^{(k)}$ označava broj permutacija od n elemenata k-te vrste

$$\begin{aligned}n^{(k)} &= n(n-1)\cdots(n-k+1) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\end{aligned}$$

i obično se naziva *padajućim faktorijelom.*

No, znamo da je broj kombinacija od n elemenata k-te vrste dat pomoću binomnog koeficijenta

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

što se, prema Definiciji 2.3, može napisati u obliku

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{(k)}}{\Gamma(k+1)}.$$

Posljednja relacija, koja daje vezu između binomnog koeficijenta i stepena padajućeg faktorijela, sugerira nam da definiramo općenito binomni koeficijent.

Definicija 2.4 ***Općeniti binomni koeficijent*** $\binom{t}{r}$, $(t, r \in \mathbb{R})$ *se definira kao*

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)}.$$

Binomni koeficijenti zadovoljavaju mnoge korisne identitete, od kojih su za nas posebno značajna sljedeća tri.

Lema 2.1

$$\begin{aligned} \binom{t}{r} &= \binom{t}{t-r} && \textit{(simetrija)}, \\ \binom{t}{r} &= \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1} && \textit{(izvlačenje ispred zagrade)}, \end{aligned}$$

$$\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1} \qquad \textit{(adiciona formula)}.$$

Dokaz. Ovi identiteti se dokazuju korištenjem Definicije 2.3 4° i Definicije 2.4. Naime,

$$\begin{aligned} \binom{t}{r} &= \frac{\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(r+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(t-r+1)} = t^{(t-r)} \cdot \frac{1}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= \binom{t}{t-r}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\binom{t}{r} &= \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} \cdot \frac{1}{r\Gamma(r)} = \frac{t}{r} \cdot \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(r)} \\ &= \frac{t}{r} \cdot \frac{(t-1)^{(r-1)}}{\Gamma(r)} = \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1}.\end{aligned}$$

Posljednji identitet ostavljamo čitaocu da dokaže za vježbu (v. zad. 2.13).

■

Sljedeći teorem daje rezultate u slučaju primjene diferentnog operatora na stepen padajućeg faktorijela, slične rezultatima diferenciranja stepena, te i rezultate primjene operatora Δ na opće binomne koeficijente.

Teorem 2.5

1° $\Delta_t t^{(r)} = r t^{(r-1)}$.

2° $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1} \quad (r \neq 0)$.

3° $\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t}{t+1}$.

Dokaz. 1° Pretpostavimo prvo da je $r \in \mathbb{Z}^+$.

$$\begin{aligned}\Delta_t t^{(r)} &= (t+1)^{(r)} - t^{(r)} = (t+1)\, t \cdots (t-r+2) - t\,(t-1) \cdots (t-r+1) \\ &= t\,(t-1) \cdots (t-r+2)\,[(t+1) - (t-r+1)] \\ &= r t^{(r-1)}.\end{aligned}$$

Neka je sada r proizvoljan realan broj. Koristeći Definiciju 2.3 4°, imamo

$$\begin{aligned}\Delta_t t^{(r)} &= \Delta_t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} = \frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= \frac{(t+1)\,\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{(t-r+1)\,\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} = r\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} \\ &= r t^{(r-1)}.\end{aligned}$$

2° Koristeći rezultat pod 1°, sada imamo

$$\begin{aligned}\Delta_t \binom{t}{r} &= \Delta_t \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{r t^{(r-1)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{r t^{(r-1)}}{r\Gamma(r)} = \frac{t^{(r-1)}}{\Gamma(r)} \\ &= \binom{t}{r-1} \quad (r \neq 0).\end{aligned}$$

3° Ova se jednakost dobija kao posljedica adicione formule:

$$\begin{aligned}\Delta_t\binom{r+t}{t} &= \binom{r+t+1}{t+1}-\binom{r+t}{t}\\ &= \binom{r+t}{t+1}+\binom{r+t}{t}-\binom{r+t}{t}\\ &= \binom{r+t}{t+1}.\end{aligned}$$

■

Posljedica 2.1 *Za fiksne $k\in\mathbb{Z}^+$ i $x\in\mathbb{R}$, vrijedi*

1° $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}$,

2° $\Delta^n x^{(k)} = k\,(k-1)\cdots(k-n+1)\,x^{(k-n)}$,

3° $\Delta^k x^{(k)} = k!$.

Sljedeći primjer nam pokazuje kako se prethodno izlaganje može nekada vrlo efikasno iskoristiti u rješavanju diferentnih jednadžbi.

Primjer 2.2 *Odrediti po jedno rješenje za svaku od diferentnih jednadžbi:*

i) $x\,(t+1)-x\,(t)=t^{(3)}+e^t$,

ii) $x\,(t+2)-2x\,(t+1)+x\,(t)=\binom{t}{5}$.

Rješenje. i) Ova se diferentna jednadžba može napisati u obliku

$$\Delta x\,(t)=\Delta\left(\frac{t^{(4)}}{4}+\frac{e^t}{e-1}\right),$$

jer je $\Delta t^{(4)}=4t^{(3)}$ i $\Delta e^t=(e-1)\,e^t$ (v. Posljedicu 2.1 1° i Teorem 2.2 2°), odakle slijedi $x\,(t)=\dfrac{t^{(4)}}{4}+\dfrac{e^t}{e-1}$.

ii) Datu diferentnu jednadžbu možemo prikazati u obliku

$$\Delta^2 x(t) = \Delta \binom{t}{5},$$

to jest

$$\Delta(\Delta x(t)) = \Delta \binom{t}{5},$$

odakle je (v. Teorem 2.5 2°) $\Delta x(t) = \binom{t}{6}$, jer je $\Delta \binom{t}{6} = \binom{t}{5}$. Konačno je

$$x(t) = \binom{t}{7}.$$

♣

Već od ranije znamo da je diferencija stepena komplicirana i kao takva nije mnogo upotrebljiva. S druge strane, stepen padajućeg faktorijela ima jako lijepe osobine pri djelovanju diferentnog operatora (v. Posljedicu 2.1). To nas, u slučajevima izračunavanja konačnih razlika, navodi na potrebu prevođenja običnog polinoma stepena k

$$P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k$$

u tzv. *faktorijelski polinom*

$$\phi_k(n) = a_0 n^{(k)} + a_1 n^{(k-1)} + ... a_{k-1} n^{(1)} + a_k.$$

U tu svrhu potrebne su nam formule za predstavljanje stepena padajućeg faktorijela pomoću običnih stepena varijable n, kao i obrnuto.

Razvijanjem odgovarajućih izraza, a na osnovu definicije stepena padajućeg faktorijela, imamo

$$\begin{aligned} n^{(0)} &= 1, \\ n^{(1)} &= n, \\ n^{(2)} &= n^2 - n, \\ n^{(3)} &= n^3 - 3n^2 + 2n, \\ n^{(4)} &= n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n, \\ n^{(5)} &= n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 50n^2 + 24n, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.16}$$

Jednostavnim preračunavanjem, dobijamo

$$\begin{aligned}
1 &= n^{(0)}, \\
n &= n^{(1)}, \\
n^2 &= n^{(2)} + n^{(1)}, \\
n^3 &= n^{(3)} + 3n^{(2)} + n^{(1)}, \\
n^4 &= n^{(4)} + 7n^{(3)} + 6n^{(2)} + n^{(1)}, \\
n^5 &= n^{(5)} + 15n^{(4)} + 25n^{(3)} + 10n^{(2)} + n^{(1)}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Izrazi (2.16) i (2.17) mogu biti jednostavnije zapisani u sljedećoj formi, respektivno

$$n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i^k n^i \tag{2.18}$$

i

$$n^k = \sum_{i=1}^{k} S_i^k n^{(i)}. \tag{2.19}$$

Koeficijenti s_i^k se nazivaju *Stirlingovim brojevima prve vrste*, a koeficijenti S_i^k *Stirlingovim brojevima druge vrste*. Zanimljive su rekurentne relacije koje zadovoljavaju ovi brojevi.

Teorem 2.6 *(i) Stirlingovi brojevi prve vrste zadovoljavaju sljedeću rekurentnu relaciju*

$$s_i^{k+1} = s_{i-1}^k - k s_i^k, \tag{2.20}$$

gdje je, za $k > 0$, $s_k^k = 1$, $s_i^k = 0$ $(i \leq 0,\ i \geq k+1)$.

(ii) Stirlingovi brojevi druge vrste zadovoljavaju sljedeću rekurentnu relaciju

$$S_i^{k+1} = S_{i-1}^k + i S_i^k, \tag{2.21}$$

gdje je, za $k > 0$, $S_k^k = 1$, $S_i^k = 0$ $(i \leq 0,\ i \geq k+1)$.

Dokaz. (i) Koristeći činjenicu da za $k > 0$, $s_k^k = 1$, $s_i^k = 0$ $(i \leq 0,\ i \geq k+1)$, formula (2.18) može biti napisana u obliku

$$n^{(k)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^k n^i. \tag{2.22}$$

Odavdje slijedi

$$n^{(k+1)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^{k+1} n^i. \tag{2.23}$$

Prema definiciji stepena padajućeg faktorijela, imamo

$$n^{(k+1)} = (n-k)\, n^{(k)}. \tag{2.24}$$

Zamjenom jednakosti (2.22) i (2.23) u (2.24), dobija se

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^{k+1} n^i &= (n-k) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^k n^i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_i^k n^{i+1} - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k s_i^k n^i \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s_{i-1}^k n^i - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k s_i^k n^i \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(s_{i-1}^k - k s_i^k \right) n^i, \end{aligned}$$

odakle neposredno slijedi formula (2.20).

(ii) Analogno prethodnom, koristeći činjenicu da za $k > 0$, $S_k^k = 1$, $S_i^k = 0$ $(i \leq 0,\ i \geq k+1)$, formula (2.19) može biti napisana u obliku

$$n^k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k n^{(i)}, \tag{2.25}$$

odakle slijedi

$$n^{k+1} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{k+1} n^{(i)}. \tag{2.26}$$

Kako je

$$n^{k+1} = n n^k, \tag{2.27}$$

to, zamjenom (2.25) i (2.26) u (2.27), dobija se

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{k+1} n^{(i)} = n \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k n^{(i)} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k n n^{(i)}. \tag{2.28}$$

Međutim,

$$\begin{aligned} n n^{(i)} &= n n (n-1) \cdots (n-i+1) = (n-i+i)\, n (n-1) \cdots (n-i+1) \\ &= n^{(i+1)} + i n^{(i)}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Koristeći relaciju (2.29), iz (2.28) imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^{k+1} n^{(i)} &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k \left(n^{(i+1)} + i n^{(i)}\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i^k n^{(i+1)} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i S_i^k n^{(i)} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_{i-1}^k n^{(i)} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i S_i^k n^{(i)} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(S_{i-1}^k + i S_i^k\right) n^{(i)},
\end{aligned}$$

odakle slijedi formula (2.21). ■

2.2 Antidiferentni operator

U prethodnoj sekciji definirali smo diferentni operator Δ, te uveli pojam stepena Δ^n $(n \in \mathbb{N}_0)$ i istakli njihove osnovne karakteristike. Logičnim se nameće pitanje: da li se stepen Δ^n može promatrati općenito, u smislu da je n bilo koji cijeli broj, a da pri tome određene osnovne osobine sa slučaja $n \in \mathbb{N}$ (prije svega osobine $1°, 2°$ i $3°$ iz Teorema 2.1) budu zadržane. Naravno da je to moguće i da je nužno prvo uvesti pojam operatora Δ^{-1}, koji je ustvari pravi inverzni operator diferentnog operatora Δ i koga ćemo zvati *antidiferentnim operatorom* . Zato ćemo zahtijevati da operator Δ^{-1} bude definiran na način da vrijedi

$$\Delta \left[\Delta^{-1} x(t)\right] = \Delta^{1-1} x(t) = \Delta^0 x(t) = x(t), \tag{2.30}$$

za sve t iz domena funkcije x.

Drugim riječima, $\Delta^{-1} x$ definirao bi se kao funkcija čija je razlika prvog reda upravo funkcija x.

Definicija 2.5 *Ako je X bilo koja funkcija čija je razlika prvog reda funkcija x, tada se X naziva **antidiferencijom** ili **neodređenom sumom** od x i označava sa $\Delta^{-1} x$ ili $\sum x$, to jest*

$$\text{ako je } \Delta X(t) = x(t), \text{ tada je } \Delta^{-1} x(t) = X(t).$$

U skladu s ovim razmatranjem, sada možemo općenito definirati Δ^{-n} $(n \in \mathbb{N})$:

$$\Delta^{-n} x(t) = \Delta^{-1}\left(\Delta^{-n+1} x(t)\right).$$

Uočimo da je antidiferentni operator ustvari diskretni analogon neodređenog integrala iz diferencijalnog računa. Naime, jednostavno se vidi da neodređeni integral igra sličnu ulogu u diferencijalnom računu, jer vrijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\int x(t)\,dt\right) = x(t).$$

Međutim, znamo da neodređeni integral nije jedinstven, na primjer

$$\int \cos t dt = \sin t + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta. Kao što se vidi iz narednog primjera, ni antidiferencija nije jedinstvena.

Primjer 2.3 *Odrediti antidiferenciju $\Delta^{-1} a^t$.*

Rješenje. Prema Teoremu 2.2, osobina 2°, imamo $\Delta a^t = (a-1)\,a^t$, tako da je $\Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = a^t$. To znači da je $\frac{a^t}{a-1}$ antidiferencija od a^t. Međutim, neka je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija a^t i takva da je $\Delta C(t) = 0$. Tada vrijedi

$$\Delta\left(\frac{a^t}{a-1} + C(t)\right) = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = a^t,$$

tako da je i funkcija $\frac{a^t}{a-1} + C(t)$, također, antidiferencija od a^t. Dakle, ako je $f(t)$ proizvoljna antidiferencija od a^t, tada je

$$\Delta\left(f(t) - \frac{a^t}{a-1}\right) = \Delta(f(t)) - \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = a^t - a^t = 0,$$

pa je $f(t) - \frac{a^t}{a-1} = C(t)$, odnosno $f(t) = \frac{a^t}{a-1} + C(t)$, za neku funkciju $C(t)$ za koju je $\Delta C(t) = 0$. Iz ovoga zaključujemo da smo odredili sve antidiferencije od a^t i da su one oblika

$$\Delta^{-1} a^t = \frac{a^t}{a-1} + C(t),$$

gdje je $C(t)$ bilo koja funkcija sa istim domenom kao i funkcija a^t i za koju vrijedi $\Delta C(t) = 0$. ♣

Na sličan način može se dokazati sljedeći teorem.

Teorem 2.7 *Ako je $y(t)$ antidiferencija od $x(t)$, tada je svaka antidiferencija od $x(t)$ data sa*

$$\Delta^{-1} x(t) = y(t) + C(t), \tag{2.31}$$

gdje je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija x i takva da za nju vrijedi $\Delta C(t) = 0$.

Dokaz. Neka je $z(t)$ proizvoljna antidiferencija od $x(t)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \Delta[z(t) - y(t)] &= \Delta z(t) - \Delta y(t) \\ &= x(t) - x(t) \\ &= 0 \\ &= \Delta C(t). \end{aligned}$$

Odavdje slijedi $z(t) - y(t) = C(t)$, to jest $z(t) = y(t) + C(t)$. ■

Primjedba 2.2 *Iz prethodnog teorema slijedi jedna vrlo važna osobina o vezi između diferentnog i antidiferentnog operatora. Naime, uz pretpostavku tog teorema, imamo da je*

$$\Delta y(t) = x(t). \tag{2.32}$$

Zamjenom veze (2.32) u (2.31), dobijamo

$$\Delta^{-1} x(t) = \Delta^{-1} \Delta y(t) = y(t) + C(t).$$

Dakle, općenito vrijedi

$$\Delta^{-1} \Delta f(t) = f(t) + C(t), \tag{2.33}$$

gdje je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija f i takva da za nju vrijedi $\Delta C(t) = 0$.

Prema tome, poredeći relacije (2.33) i (2.30), zaključujemo da je

$$\Delta \Delta^{-1} = I \quad i \quad \Delta^{-1} \Delta \neq I,$$

to jest ***zakon komutacije za operatore Δ i Δ^{-1} ne vrijedi****.*

Pozabavimo se sada pitanjem koje vrste mora biti funkcija $C(t)$. To ovisi o domenu funkcije x. Razmotrimo prvo slučaj kada je domen skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, koji je ujedno i najviše uobičajen. Tada je

$$\Delta C(n) = C(n+1) - C(n) = 0,$$

za $n = 1, 2, 3, ...,$ to jest $C(1) = C(2) = C(3) = ...,$ tako da je $C(n)$ konstanta. Primijenimo li to na funkciju iz Primjera 2.3, imaćemo

$$\Delta^{-1}a^t = \frac{a^t}{a-1} + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta.

S druge strane, ako je domen funkcije x skup realnih brojeva, tada jednadžba

$$\Delta C(t) = C(t+1) - C(t) = 0,$$

implicira da je $C(t+1) = C(t)$, za sve realne t, što znači da C može biti bilo koja periodična funkcija perioda jedan. Na primjer, može se uzeti da je $C(t) = 2\sin 2\pi t$, ili $C(t) = -5\cos 4\pi(t-\pi)$, u Teoremu 2.7 i dobiti neka antidiferencija.

Budući da nas uglavnom zanima diskretni slučaj, onda će nam važna biti sljedeća posljedica.

Posljedica 2.2 *Neka je funkcija x definirana na skupu oblika $\{a, a+1, a+2, ...\}$, gdje je a bilo koji realan broj, a neka je funkcija y antidiferencija od x. Tada svaka antidiferencija od x ima oblik*

$$\Delta^{-1}x(t) = y(t) + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta.

Povezujući sve naprijed rečeno o antidiferentnom operatoru s Teoremima 2.2 i 2.5, dolazimo do značajnih formula za izračunavanje antidiferencija nekih posebnih funkcija (nešto što podsjeća na tablicu neodređenog integrala osnovnih funkcija).

Teorem 2.8 *Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ funkcija za koju je $\Delta C(t) = 0$. Tada vrijedi*

1° $\Delta^{-1}a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + C(t), \quad (a \neq 1).$

2° $\Delta^{-1}\sin at = -\dfrac{\cos a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)\,, \quad (a \neq 2n\pi).$

3° $\Delta^{-1}\cos at = \dfrac{\sin a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)\,, \quad (a \neq 2n\pi).$

4° $\Delta^{-1}\log t = \log\Gamma(t) + C(t)\,, \ (t>0)\,.$

5° $\Delta^{-1}t^{(a)} = \dfrac{t^{(a+1)}}{a+1} + C(t)\,, \ (a \neq -1)\,.$

6° $\Delta^{-1}\dbinom{t}{a} = \dbinom{t}{a+1} + C(t)\,.$

7° $\Delta^{-1}\dbinom{a+t}{t} = \dbinom{a+t}{t-1} + C(t)\,.$

Dokaz. Dokažimo slučaj 3°. Prema Teoremu 2.2 pod 2°, imamo

$$\Delta\sin a\left(t-\frac{1}{2}\right) = 2\sin\frac{a}{2}\cos at,$$

odnosno

$$\Delta\frac{\sin a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} = \cos at,$$

pa prema Teoremu 2.7,

$$\Delta^{-1}\cos at = \frac{\sin a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C(t)\,.$$

Ostali se slučajevi dokazuju slično. ■

Za razliku od ranije, kao u Primjeru 2.2, kada smo mogli naći poneko rješenje date diferentne jednadžbe, sada smo u prilici da u nekim slučajevima možemo u potpunosti riješiti takvu jednadžbu, to jest naći njeno opće rješenje.

Primjer 2.4 *Riješiti jednadžbu*

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = \binom{t}{5} \qquad (t = 1,2,3,...)\,.$$

Rješenje. Kako je, dakle, $\Delta^2 x(t) = \dbinom{t}{5}$, to prema Posljedici 2.2 i Teoremu 2.8 7°, imamo

$$\Delta x(t) = \binom{t}{6} + C$$

i

$$x(t) = \binom{t}{7} + Ct + D,$$

gdje su C i D proizvoljne konstante. ♣

Sljedeći nam teorem daje glavne osobine antidiferentnog operatora.

Teorem 2.9

1° $\Delta^{-1}(x(t) + y(t)) = \Delta^{-1}x(t) + \Delta^{-1}y(t)$.
2° $\Delta^{-1}(\alpha x(t)) = \alpha\Delta^{-1}x(t)$, *ako je α konstanta.*
3° $\Delta^{-1}(x(t)\,\Delta y(t)) = x(t)\,y(t) - \Delta^{-1}(Ey(t)\,\Delta x(t))$.
4° $\Delta^{-1}(Ex(t)\,\Delta y(t)) = x(t)\,y(t) - \Delta^{-1}(y(t)\,\Delta x(t))$.

Dokaz. 1° Neka su x i y prve razlike funkcija X i Y, to jest $\Delta X(t) = x(t), \Delta Y(t) = y(t)$, odnosno

$$\Delta^{-1}x(t) = X(t), \Delta^{-1}y(t) = Y(t). \tag{2.34}$$

Zbog linearnosti diferentnog operatora (v. Teorem 2.1, 2°) vrijedi

$$\Delta[X(t) + Y(t)] = \Delta X(t) + \Delta Y(t) = x(t) + y(t),$$

a odavdje je (prema Definiciji 2.5)

$$\Delta^{-1}[x(t) + y(t)] = X(t) + Y(t) \overset{(2.34)}{=} \Delta^{-1}x(t) + \Delta^{-1}y(t).$$

2° Dokazuje se analogno osobini 1°.
3° Polazeći od jednakosti (v. Teorem 2.1, 4°)

$$\Delta[x(t)\,y(t)] = x(t)\,\Delta y(t) + Ey(t)\,\Delta x(t).$$

i koristeći Teorem 2.7, imamo

$$\Delta^{-1}[x(t)\,\Delta y(t) + Ey(t)\,\Delta x(t)] = x(t)\,y(t) + C(t).$$

Znajući da je $C(t) = \Delta^{-1}0$, iz osobine 1°, slijedi

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[x(t)\,y(t)] &= x(t)\,y(t) - \Delta^{-1}[Ey(t)\,\Delta x(t)] - \Delta^{-1}0 \\ &= x(t)\,y(t) - \Delta^{-1}[Ey(t)\,\Delta x(t) + 0] \\ &= x(t)\,y(t) - \Delta^{-1}[Ey(t)\,\Delta x(t)]. \end{aligned}$$

4° Dokazuje se analogno osobini 3°. ■

Primjedba 2.3 *Osobine* 1° *i* 2° *iz Teorema 2.9 znače linearnost operatora* Δ^{-1}*, dok su osobine* 3° *i* 4° *poznate kao "parcijalno sumiranje" (što je analogno parcijalnoj integraciji u diferencijalnom računu). Formule parcijalnog sumiranja su od fundamentalne važnosti u analizi diferentnih jednadžbi, kao što ćemo vidjeti kasnije.*

Sljedeći primjeri pokazuju kako se mogu praktično primijeniti formule parcijalnog sumiranja.

Primjer 2.5 *Izračunati* $\Delta^{-1} t 3^t$.

Rješenje. U Teoremu 2.9 u 3°, uzmimo da je $x(t) = t$, $\Delta y(t) = 3^t$, pa je $y(t) = \dfrac{3^t}{2}$. Tako vrijedi

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1} t 3^t &= t\frac{3^t}{2} - \Delta^{-1}\left(\frac{3^{t+1}}{2}\cdot 1\right) + C(t) \\
&= t\frac{3^t}{2} - \frac{3}{2}\Delta^{-1} 3^t + C(t) \\
&= t\frac{3^t}{2} - \frac{3}{2}\frac{3^t}{2} + C(t) \\
&= t\frac{3^t}{2} - \frac{3^{t+1}}{4} + C(t),
\end{aligned}$$

gdje je $\Delta C(t) = 0$. ♣

Primjer 2.6 *Izračunati* $\Delta^{-1}\binom{t}{4}\binom{t}{2}$.

Rješenje. Neka je $x(t) = \binom{t}{2}$, $\Delta y(t) = \binom{t}{4}$ u Teoremu 2.9 u 3°. Prema Teoremu 2.8 6°, imamo da je $y(t) = \binom{t}{5}$. Tako je (v. Teorem 2.5 2°)

$$\Delta^{-1}\binom{t}{4}\binom{t}{2} = \binom{t}{5}\binom{t}{2} - \Delta^{-1}\binom{t+1}{5}\binom{t}{1} + C(t).$$

Literatura

[1] L. J. S. Allen, Discrete and Continous Models of Populations and Epidemics, *J. Math. Systems, Estimation, Control,* Vol. I, No. 3 (1991), 335-369.

[2] L. J. S. Allen, Some Discrete-Time SI, SIR and SIS Epidemic Models, *Mathematical Biosciences,* 124(1994), 83-105.

[3] L. J. S. Allen and A. M. Burgin, Comparision of deterministic and stochastic SIS and SIR models in discrete time, *Mathematical Biosciences,* 163(2000), 1-33.

[4] E. J. Allen, J. M. Haris and L.J.S. Allen, Persistence-Time Models for Use in Viability Analyses of Vanishing Species, *J. Theor. Biol.,* **155**(1992), 33-53.

[5] L.J.S. Allen, M. A. Jones and C.F. Martin, A Discrete-Time Model with Vaccination for a Measles Epidemic, *Mathematical Biosciences,* 105(1991), 111-131.

[6] K.T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems,* Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] D.A. Behrens, G. Feichtinger and A. Prskawetz, Complex dynamics and control of arms race, *Europ. J. Oper. Research,* **100** (1997), 192-215.

[8] P. Blanchard, R. L. Devaney and G. R. Hall, *Diferential Equations,* Brooks/Cole Publishing Company - ITP, Washington, 1998.

[9] R. Bravo de la Parra and E. Sanchez, Aggregation Methods in Population Dynamics Discrete Models, *Math. Comput. Modelling,* **27** (4) (1998), 23-39.

[10] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis - Fifth Edition,* PWS Publishing Company, Boston, 1993.

[11] S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[12] D. Clark andM. R. S. Kulenović, A Coupled System of Rational Difference Equations, *Comput. Math. Appl.*, **43** (2002), 849-867.

[13] E. Dancer and P. Hess, Stability of fixed points for order-preserving discrete-time dynamical systems, *J. Reine Angew. Math.* **419**(1991), 125-139.

[14] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems,* Addison-Wesley, New York, 1987.

[15] S. Elaydi, *Discrete Chaos,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, 2000.

[16] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations - Third Edition*, Springer, New York, 2005.

[17] G. Gandolfo, *Economic Dynamics - Study Edition,* Springer-Verlag Berlin, Heildelberg, 1997.

[18] S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations (With Illustrative Examples from Economics, Psihology, and Sociology),* Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[19] E. A. Grove, M. R. S. Kulenović and G. Ladas, *Difference Equations, Theory and Applications*, 2001, (u pripremi).

[20] M. P. Hassel and H. N. Comins, Discrete time models for two-species competition, *Theor. Pop. Biol.* **9**(1976), 202-221.

[21] H. Levy and F. Lesman, *Finite Difference Equations,* Dover Publications, Inc., New York, 1992.

[22] S. Kalabušić and M. R. S. Kulenović, On the Recursive seqquence $x_{n+1} = \frac{\gamma x_{n-1}+\delta x_{n-2}}{Cx_{n-1}+Dx_{n-2}}$, *J. Difference Equ. Appl.* 9 (2003), 701-720.

[23] S. Kalabušić and M. Nurkanović, On the Dynamics of $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$ with a Periodic Coefficient, *Communications on Applied Nonlinear Analysis,* **13** (2006), no. 2, 1-21.

[24] W. G. Kelley and A. C. Peterson, *Difference Equations, An introduction with applications.* Academic Press, 2001.

[25] V. L. Kocic and G. Ladas, *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications,* Kluwer Academic Publishers, Dordreht/Boston/London, 1993.

[26] M. R. S. Kulenović and G. Ladas, *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures,* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, 2001.

[27] M. R. S. Kulenović, G. Ladas and N. R. Prokup, On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{1+x_n}$, *J. Differ. Equations Appl.* **6**(5) (2000), 563-576.

[28] M. R. S. Kulenović, G. Ladas and N. R. Prokup, On a rational difference equation, *Comput. Math. Appl.* **41**(2001), 671-678.

[29] M. R. S. Kulenović, G. Ladas and W. S. Sizer, The recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta x_{n-1}}{\gamma x_n + C x_{n-1}}$, *Math. Sci. Res. Hot-Line* 2(1998), No.5,1-16.

[30] M. R. S. Kulenović and O. Merino, *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica,* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, 2002.

[31] M. R. S. Kulenović and M. Nurkanović, Primjer konstrukcije invarijantnog intervala sistema diferentnih jednadžbi, *Zbornik radova Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Tuzli* (u povodu 25-godišnjice fakulteta), Tuzla (2001), 239-246.

[32] M. R. S. Kulenović and M. Nurkanović, Asymptotic Behavior of a Two Dimensional Linear Fractional System of Difference Equations, *Radovi matematički,* **11** (2002), no. 1, 59-78.

[33] M. R. S. Kulenović and M. Nurkanović, Global asymptotical behavior of a two dimensional system of difference equations modelling cooperation, *J. Difference Equ. Appl.* **9**(1) (2003), 149-159.

[34] M. R. S. Kulenović and M. Nurkanović, Asymptotic Behavior of a System of Linear Fractional Difference Equations, *Journal of Inequalities and Applications,* **2005** (2005), no. 2, 127-143.

[35] M. R. S. Kulenović and M. Nurkanović, Asymptotic Behavior of a Competitive System of Linear Fractional Difference Equations, *Advances in Difference Equations,* **2006** (2006), 1-13.

[36] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene,* Tehnička knjiga - Zagreb, 1967.

[37] V. Lakshmikantham and D. Triggiante, *Theory of Difference Equations,* Academic Press, Boston et al., 1988.

[38] Z. Lu, Permanence and Global Attractivity for Lotka- Volterra Difference Systems, *J. Math. Biol.,* **39**(1999), 269-282.

[39] V. Mendez and J. Fort, Dynamical evoluation of discrete epidemic models, *Phisica,* A 284 (2000), 309-317.

[40] R. E. Mickens, *Difference Equations, Theory and Applications - Second Edition,* VNR, New York, 1990.

[41] M. Nurkanović, *Asimptotsko ponašanje rješenja nekih dvodimenzionalnih sistema diferentnih jednadžbi sa primjenama,* Doktorska disertacija, PMF, Sarajevo, 2002.

[42] M. Nurkanović, On the Recursive Sequence $x_{n+1} = p_n + \frac{x_n}{x_{n-2}}$, *Zbornik radova PMF Tuzla - Svezak Matematika,* **2** (2005), 7-19.

[43] Z. Nurkanović, *Globalno asimptotsko ponašanje dvodimenzionalnih kompetitivnih i kooperativnih sistema diferentnih jednadžbi,* Magistarski rad, PMF, Sarajevo, 2001.

[44] J. H. Roberds and J. F. Selgrade, Dynamical analysis of density-dependent selection in a discrete one-island migration model, *Mathematical Biosciences,* **164** (2000), 1-15.

[45] C. Robinson, *Dynamical Systems - Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos,* CRC Press, Boca Raton, 1999.

[46] J. F. Selgrade and J.H. Roberds, Period-doubling bifurcations for Systems of difference equations and applications to models in population biology, *Nonlin. Anal. TMA,* **29** (2) (1997), 185-199.

[47] H. L. Smith, Planar Competitive and Cooperative Difference Equations, *Journal of Difference Equations, Aplications,* **3**(1998), 335-357.

[48] M. R. Spiegel, *Calculus of Finite Differences and Difference Equations,* Mc Grow Hill, New York, 1971.

[49] R. Tošić, *Kombinatorika,* PMF Novi Sad, 1999.

Index

IZVODI IZ RECENZIJA

"... Sadržaj je prezentiran na matematički korektan i jasan način. Velika prednost rukopisa je obilje riješenih primjera, grafičkih ilustracija, tabela, iza svakog poglavlja jako dobar odabir i slijed zadataka za samostalno rješavanje. Ono što daje posebnost i privlačnost rukopisu su urađene primjene iz biologije, fizike, elektrotehnike, ekonomije, teorije igara, društvenih nauka, ...

... Rukopis je privlačan za svakog čitatelja / čitateljku koji žele da pomaknu granice svog znanja i obogate svoj duh ovom atraktivnom i živom oblašću, koja teško da može ikoga ostaviti ravnodušnim. "

Dr. sc. Senada Kalabušić, vanr. profesor
Odsjek za matematiku PMF Sarajevo

"... Sadržaj je izložen na moderan i efikasan način i teoretski koncepti su motivirani i ilustrirani mnogim adekvatno odabranim primjerima uz veliki broj raznovrsnih primjena.

... smatram da rukopis ima sve karakteristike univerzitetskog udžbenika. Vjerujem da će naći svoje mjesto kao koristan univerzitetski udžbenik, kako u studentskim učionicama tako i u istraživačkim centrima u Bosni i Hercegovini i šire. Sa osobitim zadovoljstvom ga preporučujem za objavljivanje."

Dr. sc. Mustafa Kulenović, Professor
Department of Mathematics,
University of Rhode Island, USA

MEHMED NURKANOVIĆ je vanredni profesor na Odsjeku Matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli, Bosna i Hercegovina.