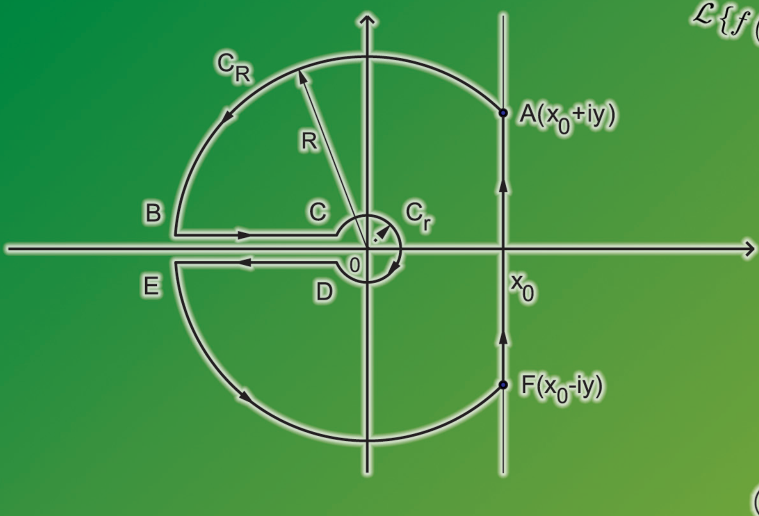
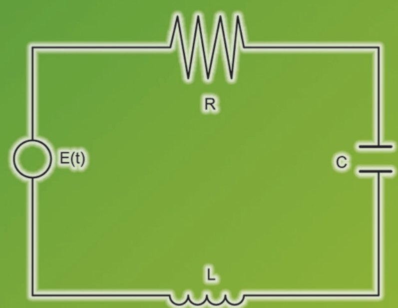
MEHMED NURKANOVIĆ ZEHRA NURKANOVIĆ

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA I PRIMJENA



$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{tp} F(p)\,dp$$



$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\,d\tau = \delta(t)$$

Prvo izdanje

Dr. sc. Mehmed Nurkanović

Dr. sc. Zehra Nurkanović

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA I PRIMJENA

Prvo izdanje

Tuzla, 2010.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni principi

1.1 Definicija Laplaceove transformacije

Integralne transformacije predstavljaju veoma značajan matematički aparat koji se uspješno koristi za rješavanje vrlo raznovrsnih i brojnih problema u područjima primijenjene matematike, matematičke fizike i inžinjerskih nauka. Klasične integralne transformacije su direktno ili indirektno vezane za analitičke funkcije i koriste se teorijom analitičkih funkcija.

Neka je $f(t)$ funkcija-original, $p = x + iy$ kompleksni parametar, a $K(t,p)$ funkcija promjenljive t i parametra p. Promatrajmo integral koji je sam po sebi neka funkcija parametra p :

$$F(p) = \int_a^b K(t,p)\, e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1.1}$$

Ako integral na desnoj strani u (1.1) postoji, tada se funkcija $F(p)$ naziva **slikom funkcije** $f(t)$, a sama operacija (1.1) prelaska od $f(t)$ ka $F(p)$ se naziva **integralnom transformacijom**. Često se sama funkcija $F(p)$ naziva integralnom transformacijom. Oblik transformacije i njen karakter ovisi o izboru granica integriranja a i b, a također i o funkciji $K(t,p)$, koja se naziva **jezgrom transformacije**. U ovisnosti o jezgru u praksi je uvedeno nekoliko različitih integralnih transformacija, kao što su: Fourierova, Laplaceova, Hankelova, Mellinova, Hilbertova, Stiltjesova, Legendreova, Jacobieva, Gegenbauerova, Laguerreova, Hermiteova, Radonova i malotalasna (wavelet).

Ako u (1.1) stavimo $a = 0, b = +\infty, K(t,p) = 1$, dobit ćemo:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1.2}$$

Operacija opisana jednakošću (1.2), kad god integral (1.2) (koji je običan Riemannov integral) konvergira, tj. kad god granična vrijednost

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \lim_{\tau \to +\infty} \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t)\, dt$$

postoji (kao konačan broj), naziva se **Laplaceovom transformacijom**. Nesvojstveni integral u formuli (1.2) se naziva **Laplaceovim integralom** (operatorom).

Simbolički se jednakost (1.2) zapisuje kao :

$$\mathcal{L}\{f\} = F, \quad f(t) \risingdotseq F(p), \quad F(p) \rightleftarrows f(t), \quad \text{itd.}$$

Izraz (1.2), dakle, ima smisla ako postoji nesvojstveni integral koji figurira u tom izrazu. Zbog toga će nas zanimati uvjeti egzistencije neodređenog integrala (1.2). Zajedno s tim, ovi uvjeti određuju oblast egzistencije transformacije $F(p)$.

Primjer 1.1.1 *Ako je $f(t) \equiv 1$ $(t \geq 0)$, tada je*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot (1)\, dt \\
&= \lim_{\tau \to +\infty} \int_0^{\tau} e^{-pt} dt = \lim_{\tau \to +\infty} \left(\left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_{t=0}^{t=\tau} \right) \\
&= \lim_{\tau \to +\infty} \left(\frac{e^{-p\tau}}{-p} + \frac{1}{p} \right).
\end{aligned}$$

Uzmemo li da je $p \in \mathbb{R}$, onda je jasno da posljednji limes postoji ako je $p > 0$. Dakle,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p} \quad (p > 0).$$

Isto tako, uzmemo li da je p kompleksna varijabla $(p = x + iy)$, dobili bismo

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re}(p) > 0). \tag{1.3}$$

Naime, vrijedi

$$\lim_{\tau\to+\infty}\left|\frac{e^{-p\tau}}{-p}\right| = \lim_{\tau\to+\infty}\frac{\left|e^{-x\tau}\right|\left|e^{-iy\tau}\right|}{|p|} = \lim_{\tau\to+\infty}\frac{e^{-x\tau}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

za $x = \mathrm{Re}\,(p) > 0$. ♣

U matematičkom i tehničkom smislu domen od p je vrlo bitan. Međutim, u praktičnom smislu, kada se rješavaju diferencijalne jednadžbe metodom Laplaceove transformacije, domen od p se rutinski ignorira.

Primjer 1.1.2 *Koristeći se definicijom Laplaceove transformacije za funkciju*

$$f\,(t) = \begin{cases} 2 & (0 \le t \le 1) \\ e^t & (t > 1) \end{cases}$$

imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f\,(t)\right\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f\,(t)\,dt = \int_0^{1} e^{-pt} f\,(t)\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-pt} f\,(t)\,dt \\
&= \int_0^1 2e^{-pt}dt + \lim_{\tau\to+\infty}\int_1^{\tau} e^t e^{-pt}dt \\
&= \left(\left.\frac{2e^{-pt}}{-p}\right|_{t=0}^{t=1}\right) + \lim_{\tau\to+\infty}\left(\left.\frac{e^{(1-p)t}}{1-p}\right|_{t=1}^{t=\tau}\right) \\
&= -\frac{2e^{-p}}{p} + \frac{2}{p} + \lim_{\tau\to+\infty}\left(\frac{e^{(1-p)\tau}}{1-p} - \frac{e^{1-p}}{1-p}\right) \\
&= \frac{2}{p} - \frac{2e^{-p}}{p} + \frac{e^{1-p}}{p-1} \qquad (\mathrm{Re}\,(p) > 1)\,.
\end{aligned}$$

♣

Primjer 1.1.3 *Odrediti Laplaceovu transformaciju funkcija* e^{qt} *i* e^{-qt}.

Rješenje. Za funkciju $f(t) = e^{qt}$ imamo

$$\mathcal{L}\left\{e^{qt}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{qt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(q-p)t}dt = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\left.\left(\frac{e^{(q-p)t}}{q-p}\right)\right|_0^t = \frac{1}{p-q},$$

odnosno,

$$\mathcal{L}\left\{e^{qt}\right\} = \frac{1}{p-q}, \quad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(q). \tag{1.4}$$

U slučaju $f(t)=e^{-qt}$ je

$$\mathcal{L}\left\{e^{-qt}\right\}=\frac{1}{p+q},\quad \mathrm{Re}(p)+\mathrm{Re}(q)>0. \qquad \clubsuit \tag{1.5}$$

Primjer 1.1.4 *Odrediti* $\mathcal{L}\{\cos\omega t\}$ *i* $\mathcal{L}\{\sin\omega t\}$.

Rješenje. Budući da je

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2},$$

imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos\omega t\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos\omega t dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\tau\to+\infty}\int_0^{\tau} e^{(i\omega-p)t}dt+\frac{1}{2}\lim_{\tau\to+\infty}\int_0^{\tau} e^{-(i\omega+p)t}dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\tau\to+\infty}\left(\left.\frac{e^{(i\omega-p)t}}{i\omega-p}\right|_0^{\tau}\right)+\frac{1}{2}\lim_{\tau\to+\infty}\left(\left.\frac{e^{-(i\omega+p)t}}{-(i\omega+p)}\right|_0^{\tau}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+i\omega}=\frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad (\mathrm{Re}\,(p)>0)\,,
\end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{(i\omega-p)\tau}\right| &= \lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{i\omega\tau}\right|\left|e^{-p\tau}\right|=\lim_{\tau\to+\infty}1\cdot\left|e^{-p\tau}\right| \\
&= \lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-(x+iy)\tau}\right|=\lim_{\tau\to+\infty}\left|e^{-x\tau}\right|\left|e^{-iy\tau}\right| \\
&= \lim_{\tau\to+\infty}e^{-x\tau}=0 \qquad (x=\mathrm{Re}\,(p)>0)\,.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i},$$

analogno se dobije

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \qquad (\mathrm{Re}\,(p)>0)\,. \qquad \clubsuit$$

Poglavlje 2

Inverzna Laplaceova transformacija

2.1 Pojam i osobine inverzne Laplaceove transformacije

Do sada smo u više navrata demonstrirali kako Laplaceovu transformaciju $F(p)$ od date funkcije $f(t)$ možemo izračunati neposrednom integracijom. Pogledajmo sada inverzni problem, tj. kako možemo, za datu Laplaceovu transformaciju $F(p)$ od nepoznate funkcije $f(t)$, odrediti $f(t)$? Ovo je u suštini vezano za iznalaženje rješenja integralne jednadžbe

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = F(p).$$

U ovom trenutku poprilično je teško nositi se s problemom kao što je ovaj. Međutim, u jednostavnijim slučajevima moguće je neposredno, ili uz malo modificiranja, iz Tabele Laplaceove transformacije pročitati odgovarajuću funkciju $f(t)$, odnosno tzv. inverznu Laplaceovu transformaciju. Naime, ako je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, onda ćemo *inverznu Laplaceovu transformaciju* označiti sa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t), \qquad t \geq 0,$$

koja preslikava Laplaceovu transformaciju funkcije nazad u originalnu funkciju. Na primjer,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+a^2}\right\} = \cos at.$$

Prirodno se postavlja pitanje: Da li postoji neka druga funkcija $f(t) \neq \cos at$ za koju je $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+a^2}\right\} = f(t)$? Općenitije, treba da znamo kada je inverzna transformacija *jedinstvena.*
U tom cilju, promatrajmo funkciju

$$g(t) = \begin{cases} \cos at, & t > 0 \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

Tada je

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{p}{p^2 + a^2},$$

jer funkcija koja se razlikuje u jednoj tački (ili čak u konačnom broju tačaka) nema različitu vrijednost Laplaceovog integrala, budući da je to Riemannov integral. Ovaj nam primjer pokazuje da $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ može da bude više od jedne funkcije, pa čak i beskonačno mnogo funkcija, ako se promatraju funkcije s prekidima. Srećom, taj se problem može izbjeći ako promatramo neprekidne funkcije.

Teorem 2.1.1 ***(Lerchov teorem)*** *Različite neprekidne funkcije na* $[0, +\infty)$ *imaju različite Laplaceove transformacije.*

Ovo znači da ako ograničimo naše razmatranje na funkcije koje su neprekidne na $[0, +\infty)$, tada je inverzna Laplaceova transformacija

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t),$$

jedinstvena. Upravo ćemo se tako ponašati u daljem izlaganju, te ćemo zbog toga pisati

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2 + a^2}\right\} = \cos at, \qquad t \geq 0.$$

Budući da će mnoge od funkcija kojima ćemo se baviti biti rješenja diferencijalnih jednadžbi, pa će kao takve biti neprekidne, gornje prepostavke su potpuno opravdane. Naravno, budući da orignial $f(t)$ može biti po dijelovima neprekidna funkcija, tom pitanju ćemo se posebno posvetiti.

Prije toga, pokažimo da je $\mathcal{L}^{-1}$ *linearan* operator. Naime, ako je

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(p),$$

odnosno

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\} = g(t),$$

tada, zbog linearnosti operatora $\mathcal{L}$, vrijedi

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(p) + bG(p),$$

odakle slijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{aF\left(p\right)+bG\left(p\right)\right\}=af\left(t\right)+bg\left(t\right)=a\mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}+b\mathcal{L}^{-1}\left\{G(p)\right\},$$

tj. $\mathcal{L}^{-1}$ je zaista linearan operator.

Primjer 2.1.1 *Koristeći se osobinom linearnosti operatora $\mathcal{L}^{-1}$ i Lerchovim teoremom, imamo*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\left(p-1\right)}-\frac{1}{2\left(p+1\right)}\right\} &= \frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\ &= \sinh t, \qquad t\geq 0. \qquad \clubsuit\end{aligned}$$

Napomena 2.1.1 *Već smo vidjeli da je jedna od važnih praktičnih osobina Laplaceove trasformacije da se ona može primjenjivati na prekidne funkcije. Zbog toga se mora imati na umu da u općenitom slučaju postoji više funkcija koje imaju istu Laplaceovu transformaciju, pa samim tim svaka od njih ima istu inverznu Laplaceovu transformaciju. To proističe iz osobina Riemannovog integrala. Zbog toga se jedinstvenost inverzne Laplaceove transformacije u općenitom smilu treba shvatiti u smislu izjave Teorema 1.3.5:* ***ako je u poluravni*** $\mathrm{Re}(p)>\alpha$ ***funkcija*** $F(p)$ ***slika dvaju originala*** $f_1(t)$ ***i*** $f_2(t)$***, onda su ti originali identički jednaki u tačkama svoje neprekidnosti.***

Uočimo da ne možemo uvijek inverznu Laplaceovu transformaciju odrediti neposredno iz Tabele B Laplaceove transformacije, nego da je često potrebno prvo koristiti osobine iz Tabele A, a onda to kombinirati s podacima iz Tabele B. Ilustrirat ćemo to na nekoliko primjera, karakterističnih za određene osobine. Napominjemo da su ovo sve jednostavnije situacije, dok će o znatno složenijim slučajevima biti riječi nešto kasnije.

i) Teoremi translacije i osobine skaliranja

U ovom slučaju treba istaknuti da vrijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(\frac{p}{a}\right)\right\}=af\left(at\right), \qquad t\geq 0 \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(p-a\right)\right\}=e^{at}f\left(t\right), \qquad t\geq 0 \tag{2.2}$$

i općenito

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ap}F\left(p\right)\right\}=\sigma\left(t-a\right)f\left(t-a\right), \qquad t\geq 0, a\geq 0. \tag{2.3}$$

Poglavlje 3

Primjena Laplaceove transformacije

Laplaceova transformacija ima jako veliku primjenu u praktičnim problemima, posebno pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi (običnih i parcijalnih), zatim integralnih, diferentnih, diferencijalno-diferentnih jednadžbi i pri izračunavanju nekih određenih integrala, koji se najčešće ne mogu riješiti standardnim metodima.

3.1 Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Neka nam je zadan Cauchyev problem, to jest diferencijalna jednadžba

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n y(t) = Q(t), \tag{3.1}$$

uz uvjete

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ \ldots\ , y^{(n-2)}(0) = y_0^{(n-2)},\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \tag{3.2}$$

Pretpostavimo da je tražena funkcija $y(t)$ original i neka je $Y(p)$ njena slika, to jest $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$. Osim toga, neka je $\mathcal{L}\{Q(t)\} = R(p)$.

Prevedimo (primjenom Laplaceove transformacije) jednadžbu (3.1) iz prostora originala u prostor slika. Primjenom teorema o diferenciranju originala i primjenom formule (1.66), dobijamo:

$$\mathcal{L}\left\{y^{(n)}(t)\right\} = p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0),$$

odnosno, zbog (3.2),

$$\mathcal{L}\left\{y^{(n)}(t)\right\} = p^n Y(p) - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_0' - \ldots - y_0^{(n-1)}$$

i analogno

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y^{(n-1)}(t)\right\} &= p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}y_0 - p^{n-3}y_0' - \ldots - y_0^{(n-2)}, \\ \mathcal{L}\left\{y^{(n-2)}(t)\right\} &= p^{n-2}Y(p) - p^{n-3}y_0 - p^{n-4}y_0' - \ldots - y_0^{(n-3)}, \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\left\{y\left(t\right)\right\} &= Y\left(p\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Budući da je $\mathcal{L}\left\{Q(t)\right\} = R(p)$, imamo:

$$\begin{aligned} & Y(p)\left(p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \ldots + a_n\right) \\ & -y_0\left(p^{n-1} + a_1p^{n-2} + a_2p^{n-3} + \ldots + a_{n-1}\right) \\ & -y_0'\left(p^{n-2} + a_1p^{n-3} + a_2p^{n-4} + \ldots + a_{n-2}\right) \\ & -\ldots \\ & -y_0^{(n-1)} \\ = \ & R(p). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jednadžba (3.4) se naziva transformiranom (operatorskom) jednadžbom Cauchyevog problema (3.1)-(3.2), koja je iz prostora originala, na taj način, prešla u algebarsku jednadžbu (3.4), sa nepoznatom funkcijom $Y(p)$ u prostoru slika. Početni uvjeti (3.1) su u njoj automatski uključeni i to je jedna dodatna prednost rješavanja Cauchyevog problema (3.1)-(3.2) pomoću Laplaceove transformacije. Ako uvedemo oznaku

$$p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \ldots + a_n = P_n(p),$$

jednadžba (3.4) može napisati u obliku

$$Y(p)P_n(p) - y_0P_{n-1}(p) - y_0'P_{n-2}(p) - \ldots - y_0^{(n-1)} = R(p).$$

Odavde slijedi

$$Y(p) = \frac{R(p)}{P_n(p)} + \frac{y_0P_{n-1}(p) + y_0'P_{n-2}(p) + \ldots + y_0^{(n-1)}}{P_n(p)}. \tag{3.5}$$

Određivanjem originala prema slici (3.5), dobijamo rješenje Cauchyevog problema. Uočimo da u specijalnom slučaju, kada je: $y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0$, imamo da jednadžba (3.4) ima oblik

$$Y(p) = \frac{R(p)}{P_n(p)}. \tag{3.6}$$

Uvedimo oznaku $\frac{1}{P_n(p)} = P(p)$. Tada je $Y(p) = P(p)R(p)$.

Ako je $P(p) = \mathcal{L}\{G(t)\}$, onda zbog $\mathcal{L}\{Q(t)\} = R(p)$, imamo

$$Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{G(t)\} \cdot \mathcal{L}\{Q(t)\} = \mathcal{L}\{G(t) * Q(t)\},$$

pa se traženo rješenje izražava pomoću konvolucije

$$y(t) = G(t) * Q(t). \tag{3.7}$$

Primjer 3.1.1 *Riješiti diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' + y = t^3 + 6t,$$

uz početne uvjete

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Rješenje. Ako primijenimo Laplaceovu transformaciju na datu jednadžbu, dobijamo

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\left\{t^3\right\} + 6\mathcal{L}\{t\}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} &= p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p), \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(p), \\ \mathcal{L}\{Q(t)\} &= \mathcal{L}\left\{t^3\right\} + 6\mathcal{L}\{t\} = \frac{3!}{p^4} + \frac{6}{p^2}, \end{aligned}$$

transformirana jednadžba izgleda ovako

$$p^2Y(p) + Y(p) = \frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^2},$$

odnosno,

$$Y(p) = \frac{6}{p^4} = \mathcal{L}\left\{t^3\right\},$$

iz čega neposredno dobijamo

$$y(t) = t^3. \qquad \clubsuit$$

Napomena 3.1.1 *Vrlo često se funkcija $G(t)$, koju zovemo* ***Greenovom funkcijom****, može odrediti pomoću funkcije $P(p) = \frac{1}{P_n(p)}$, tako što se funkcija $P(p)$ napiše u obliku zbira parcijalnih razlomaka, kao što je slučaj u narednim primjerima.*

Dodatak A

Tabele Laplaceove transformacije i specijalnih funkcija

TABELA A

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$
1.	$af_1(p) + bf_2(p)$	$aF_1(p) + bF_2(p)$
2.	$af(at)$	$F\left(\frac{p}{a}\right)$
3.	$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
4.	$u(t-a) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$	$e^{-ap} F(p)$
5.	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
6.	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
7.	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
8.	$-tf(t)$	$F'(p)$
9.	$t^2 f(t)$	$F''(p)$

TABELA B

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	t	$\frac{1}{p^2}$
3.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4.	t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \qquad \alpha > 0$
5.	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
6.	$t^n e^{at}$	$\frac{(n+1)!}{(p-a)^{n+1}}$
7.	$t^\alpha e^{at}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-a)^{\alpha+1}}$
8.	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
9.	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
10.	$e^{bt} \sin at$	$\frac{a}{(p-b)^2+a^2}$
11.	$e^{bt} \cos at$	$\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}$

TABELA C

Specijalne funkcije
1. Gama funkcija: $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0,$ $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$
2. Beta funkcija $B(m,n) = \int\limits_0^{+\infty} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m,n > 0,$
3. Besselova funkcija $J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \right\}$
4. Besselova funkcija reda nula $J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$
5. Modificirana Besselova funkcija $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots \right\}$

Dodatak B

Rješenja zadataka

Sekcija 1.1

1. *a)* $\frac{3}{p^2}$, *b)* $\frac{1}{p-2}$, *c)* $\frac{6}{p^2+9}$, *d)* $\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$,

e) $\frac{1}{(p-2)^2}$, *f)* $\frac{p-1}{p^2-2p+2}$, *g)* $\frac{1}{p}e^{-p}$, *h)* $\frac{\omega\left(1+e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right)}{p^2+\omega^2}$.

2. Uputa: $\int\limits_0^{+\infty} t^{-n}e^{-pt}dt \geq e^{-p}\int\limits_0^1 t^{-n}dt + \int\limits_0^{+\infty} t^{-n}e^{-pt}dt$, jer, ako je $p > 0$, onda je $e^{-pt} \geq e^{-p}$ za $0 \leq t \leq 1$. Ali $\int\limits_0^1 t^{-n}dt$ divergira, jer za $n = 1$ imamo $\int\limits_0^1 t^{-1}dt = \ln|t|\Big|_0^1 = -\infty$, a za $n > 1$ vrijedi $\int\limits_0^1 t^{-n}dt = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}}\Big|_{t=0}^{t=1} = +\infty$.

Sekcija 1.2

2. *a)* $c_1f_1 + c_2f_2$ je po dijelovima neprekidna funkcija eksponencijalnog poretka $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

b) $f \cdot g$ je po dijelovima neprekidna funkcija eksponencijalnog poretka $\alpha + \beta$.

3. a) Funkcija je neprekidna na $[0, +\infty\rangle$, ali nije eksponencijalnog poretka.

b) Vidjeti Primjer 1.2.3.

Sekcija 1.3

1. $\dfrac{3}{p^2} + \dfrac{2}{p-2} - \dfrac{16}{p^2+16}$.

2. a) $\dfrac{p^2 - 2\omega^2}{p\left(p^2 - 4\omega^2\right)}$, $\quad b$) $\dfrac{2\omega^2}{p\left(p^2 - 4\omega^2\right)}$, $\quad c$) $\dfrac{4-3p}{p^2-4}$.

3. a) $\cos\omega t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{(2n)!}$, $\quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$,

b) $\sin\omega t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad \mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

4. a) $\mathcal{L}\left\{\sin^2\omega t\right\} = \dfrac{2\omega^2}{p\left(p^2+4\omega^2\right)}$, $\quad b$) $\mathcal{L}\left\{\cos^2\omega t\right\} = \dfrac{p^2+2\omega^2}{p\left(p^2+4\omega^2\right)}$.

Sekcija 1.4

1. a) $\dfrac{2}{(p-3)^2+4}$, $\quad b$) $\dfrac{6}{(p+2)^4}$.

2. $\dfrac{2e^{-3p}}{p^3}$.

3. a) $\mathcal{L}\{t^n \sin\omega t\} = \dfrac{1}{2i}\left[\mathcal{L}\left\{t^n e^{i\omega t}\right\} - \mathcal{L}\left\{t^n e^{-i\omega t}\right\}\right]$,

$$\mathcal{L}\{t^n \sin\omega t\} = \frac{n!}{2i}\left[\frac{1}{(p-i\omega)^{n+1}} - \frac{1}{(p+i\omega)^{n+1}}\right].$$

b) $\mathcal{L}\{t^n \cos\omega t\} = \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left\{t^n e^{i\omega t}\right\} + \mathcal{L}\left\{t^n e^{-i\omega t}\right\}\right]$,

$$\mathcal{L}\{t^n \cos\omega t\} = \frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(p-i\omega)^{n+1}} + \frac{1}{(p+i\omega)^{n+1}}\right].$$

4. *a)* $\mathcal{L}\left\{e^{3t}\sinh\sqrt{2}t\right\} = F(p-3)$, gdje je $F(p) = \mathcal{L}\left\{\sinh\sqrt{2}t\right\}$;

$R:\ \dfrac{2}{(p-3)^2-2}$.

Sekcija 1.5

1. $\dfrac{\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(1-e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right)}$.

2. $\dfrac{1}{p\left(1+e^{ap}\right)}$.

4. $\dfrac{1-e^{-ap}-ape^{-ap}}{ap^2\left(1-e^{-2ap}\right)}$.

Sekcija 1.7

1. *a)* $\mathcal{L}\{t\sin at\} = -\dfrac{d}{dp}\mathcal{L}\{\sin at\} = -\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{a}{p^2+a^2}\right) = \dfrac{2ap}{\left(p^2+a^2\right)^2}$,

b) $\dfrac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$, *c)* $\dfrac{2ap}{\left(p^2-a^2\right)^2}$,

d) $\dfrac{p^2+a^2}{\left(p^2-a^2\right)^2}$, *f)* $\dfrac{6ap^2-2a^3}{\left(p^2+a^2\right)^3}$,

e) $\mathcal{L}\left\{t^2\cos at\right\} = \dfrac{d^2}{dp^2}\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{d^2}{dp^2}\left(\dfrac{p}{p^2+a^2}\right) = \dfrac{2p^3-6a^2p}{\left(p^2+a^2\right)^3}$,

g) $F(p) = \mathcal{L}\{\sin at\sinh at\} = \dfrac{1}{4i}\left[\mathcal{L}\left\{\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)\left(e^{at}-e^{-at}\right)\right\}\right]$,

$$F(p) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{(p-a)^2+a^2} - \frac{1}{(p+a)^2+a^2}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t\sin at\sinh at\} = -\frac{d}{dp}F(p) = a\left(\frac{p-a}{\left((p-a)^2+a^2\right)^2} - \frac{p+a}{\left((p+a)^2+a^2\right)^2}\right),$$

h) analogno zadatku pod *g)*.

Dr. sc. Mehmed Nurkanović je vanredni profesor, a Dr. sc. Zehra Nurkanović je docent na Odsjeku Matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli, Bosna i Hercegovina.

9 78-9958-13-0489