A. Zolić

O ELEMENTARNIM METODAMA RJEŠAVANJA PROBLEMA EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI FUNKCIJA

0. Nalaženje ekstremuma (maksimuma ili minimuma) zadate funkcije u zadacima kako teorijskog tako i praktičnog karaktera spada, svakako, u grupu veoma značajnih zadataka matematike i njenih primjena. Naime, metematički modeli raznih pojava i procesa u prirodi su funkcije jedne ili više promjenljivih, a za rješavanje izvjesnog broja zadataka povezanih s tim pojavama i procesima potrebno je naći maksimum ili minimum tih funkcija. Metode nalaženja ekstremuma zavise od osobina posmatrane funkcije, od oblasti u kojoj se traže ekstremumi i, naravno, od matematičkog aparata koji se koristi.

Ilustracije radi navedimo sljedeće zadatke.

Zadatak 1. Kap vode na dobro zagrijanoj podlozi teži da poprimi oblik lopte. Zašto?

Radi se o minimalnoj površini tijela konstantne zapremine.

Zadatak 2. Trajektorija leta aviona iz grada A u grad B koji je udaljen *a* km ima sljedeći oblik

$$y=\frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-w/v}+\left(\frac{x}{a}\right)^{1+w/v}\right]$$

gdje je *v* [km/h] brzina aviona a *w* [km/h] brzina vjetra. Do koje najviše visine se penje avion?

Rješenje je, naravno, max *y*.

Zadatak 3. U jednoj fabrici proizvode se ženske i muške majice. Kapacitet fabrike je takav da se može proizvesti 100 ženskih ili 300 muških majica dnevno. Odjeljenje za kontrolu kvaliteta proizvoda dnevno može provjeriti i pustiti u prodaju najviše 150 (bilo kojih) majica. Cijena ženske majice je dva puta veća od cijene muške majice. Kako treba napraviti plan proizvodnje, tj. koliko kojih majica treba proizvesti dnevno da bi fabrika obezbijedila maksimalnu dobit?

Ako sa x označimo broj ženskih a sa y broj muških majica, onda se zadatak svodi na nalaženje maksimuma funkcije $z=f(x,y)=2x+y$, maksimuma funkcije cilja $z=f(x,y)=2x+y$, u oblasti koja je određena sistemom linearnih algebarskih nejednačina

$$\begin{aligned}3x+y&\le 300,\\ x+y&\le 150,\\ x\ge 0,\ \ y&\ge 0\end{aligned}$$

Rješenje zadatka je $z_{\max}=f(75,75)=2\cdot 75+75=225$.

Za rješavanje ovakvih i sličnih zadataka razvijene su i razvijaju se posebne matematičke discipline kao što su teorija optimalnog upravljanja, matematičko programiranje – linearno i nelinearno i niz drugih disciplina koje su povezane s ekstremnim vrijednostima.

1. Poznato je da je za nalaženje ekstremnih vrijednosti funkcija jedne ili više primjenljivih postoji dosta opšta metoda zasnovana na pojmovima i teoriji diferencijalnog računa. Pođimo, naime, od definicije lokalnog ekstremuma neprekidne funkcije. Za klasu neprekidno diferencijabilnih funkcija zadatak nalaženja ekstremnih vrijednosti funkcije svodi se na sljedeću shemu: nalaženje izvoda $f'(x)$, rješavanje jednačine $f'(x)=0$ ili nalaženje tačaka u kojima $f'(x)$ nije definisan, utvrđivanje znaka izvoda $f'(x)$ u okolini nulâ izvoda $f'(x)$ ili u okolini tačaka nedefinisanosti izvoda $f'(x)$, ili na shemu: nalaženje $f'(x)$, rješavanje jednačine $f'(x)=0$, nalaženje tačaka u kojima $f'(x)$ nije definisano, nalaženje $f^{(k)}(x), k\ge 2$, znak $f^{(k)}(x)$ u nulama prvog izvoda, ...

Iako je ovaj postupak dosta opšteg karaktera, on ima i nedostatke i ograničenja primjene. Prije svega, poretpostavka da postoji $f'(x)$ je jaka i ograničavajuća. Šta ako ne postoji $f'(x)$? (A to nije rijedak slučaj!) Metoda je u tom slučaju neprimjenljiva. S druge strane, i kada je motodu moguće primijeniti, ona je toliko shematizovana i formalizovana, da njen formalizam bitno osiromašuje logičko mišljenje i zaključivanje, veoma značajnu karakteristiku matematike i matematičkog rezonovanja. Dalje, vrlo često nije poznat analitički oblik funkcije $f(x)$ nego su poznate samo tablične vrijednosti $f(x_i)$ funkcije $f(x)$ u tačkama $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$. Dodajmo svemu ovome i činjenicu da u nastavi matematike na nižim stepenima obrazovanja nemamo na raspolaganju aparat diferencijalnog računa.

2. Jasno je da postoji velika potreba za metodama nalaženja ekstremnih vrijednosti funkcija koje ne pretpostavljaju poznavanje i mogućnost primjene diferencijalnog računa. Takve metode nazivamo *elementarnim metodama*. Ovdje ćemo dati nekoliko takvih, elementarnih metoda. One su ponekad složenije, ali, šire posmatrano, korisnije su zato što nisu samo cilj rješavanja problema ekstremuma, već i same ukazuju na raznovrsnost matematičkog mišljenja i zaključivanja obogaćujući matematičku kulturu učenika i šireći poglede na bogatstvo matematike i njenih primjena. Ponekad su te metode i brže i ljepše od opštih metoda. Dakle, treba ih posmatrati u punoj njihovoj raznovrsnosti prateći njihovu primjenu različitim misaonim tokovima. Ne smiju se formalizovati jer bi u tom slučaju izgubile svoj osnovni smisao. Može se slobodno reći da je za rješavanje svakog posebnog zadatka o ekstremnim vrijednostima funkcija potrebna posebna metoda. Metode su, znači, veoma različite, a zajednička karakteristika je korišćenje raznih očiglednih ili manje poznatih identičnosti, nejednakosti, raznih osobina elementarnih funkcija i tako dalje. Veoma je značajno to što se primjena elementarnih metoda u slučaju ekstemnih vrijednosti funkcija više promjenljivih ne komplikuje.

2.1. Posmatrajmo kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su koeficijenti *a*, *b*, *c* realni brojevi i pri tome je $a \neq 0$. Zapišimo funkciju na slijedeći način

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

odnosno

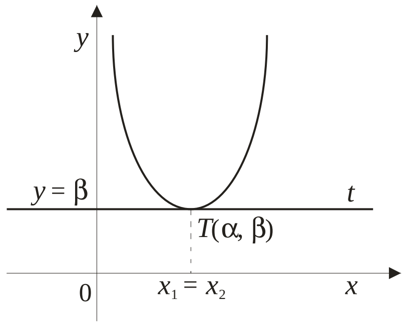
$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Očigledno, drugi sabirak $\beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ ne zavisi od *x*; dakle, promjenom *x* mijenja se samo prvi sabirak. Lako se dokazuje sljedeća teorema.

Teorema. Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ima ekstemnu vrijednost za $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, i to: ako je $a < 0$, onda je $M = \max f(x) = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \beta$, a ako je $a > 0$, onda je $m = \min f(x) = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \beta$. Ako postoji $\max f(x)$, onda ne postoji $\min f(x)$ i, obratno, ako postoji $\min f(x)$, onda ne postoji $\max f(x)$.

Dokaz. Zaista, za $a<0$ prvi sabirak $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \le 0$, gdje se znak jednakosti postiže samo za $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, dakle, $\max f(x)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\beta$; za $a>0$ prvi sabirak $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \ge 0$, gdje se, opet, znak jednakosti postiže samo za $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, dakle, $\min f(x)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\beta$.

Geometrijska interpretacija je sljedeća: u tjemenu $T\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ parabole $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0,$ tangenta $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, tj. $y=\beta$ je paralelna osi O*x*, a to znači da jednačina



$$ax^2+bx+c=\beta,$$

odnosno

$$ax^2+bx+c-\beta=0$$

ima dva realna i jednaka rješenja. Dakle, diskriminanta

$$D\equiv b^2-4a(c-\beta)=0,$$

odakle je

$$\beta=\frac{b^2-4ac}{4a},$$

odnosno, $x_{1,2}=\dfrac{-b\mp 0}{2a}$, tj. $x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}$.

Primjer 1. Naći ekstremne vrijednosti funkcije

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

Treba odrediti β (ako postoji) tako da jednačina

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\beta,$$

odnosno $(1-\beta)x^2+(1+\beta)x+1-\beta=0$ ima dvostruko rješenje, tj.

$$D\equiv(1+\beta)^2-4(1-\beta)(1-\beta)=0,$$

odakle je $\beta_1=\dfrac{1}{3}$ i $\beta=3$. Dakle, ekstremne vrijednosti funkcije su $\dfrac{1}{3}$ i 3; apscise ekstremnih vrijednosti su: za $\beta=\dfrac{1}{3}$ je $x_1=-\dfrac{1+\frac{1}{3}}{2\left(1-\frac{1}{3}\right)}=-1$, za $\beta=3$ je $x_2=-\dfrac{1+3}{2(1-3)}=1$.

Na kraju se zaključuje: $M=\max f(x)=f(1)=3$ i $m=\min f(x)=f(-1)=\dfrac{1}{3}$.

Primjer 2. Naći ekstremne vrijednosti funkcije

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Na sličan način kao u prethodnom primjeru doijamo $\beta_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{2}}{2}$, $x_1=-\sqrt{2}-1$ i $x_2=\sqrt{2}-1$, $M=\max f(x)=f(\sqrt{2}-1)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $m=\min f(x)=f(-\sqrt{2}-1)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

2.2. Za rješavanja problema ekstremnih vrijednosti funkcije mogu se, ponekad, uspješno iskoristiti poznate nejednakosti. Tako, na primjer, možemo iskoristiti Košijevu nejednakost, nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_3}=G,$$

$a_1\geq 0$, $a_2\geq 0$, ..., $a_n\geq 0$, gdje znak jednakosti važi ako i samo ako je $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Primjer 3. Naći minimum funkcije

$$f(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Očigledno je

$$f(x)=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\quad \sqrt{x^2+1}>0\quad \text{i}\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0.$$

Primjenom nejednakosti $A\geq G$ dobijamo

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\geq\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=1,$$

a odavde je $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$.

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, odakle je $x_0=0$. Zaključujemo: za $x_0=0$ je $\min f(x)=f(0)=2$.

Primjer 4. Naći maksimum funkcije

$$f(x)=\frac{x^2}{4}(a-x),\ a=\text{const.}\ \text{i}\ 0\leq x\leq a.$$

Ovdje imamo

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{4}\right)(a-x)=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)(a-x)\leq\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+(a-x)}{3}\right)^3.$$

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=a-x$, tj. $x=\frac{2a}{3}$, pa je $\max f(x)=f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}$.

Primjer 5. Naći minimum funkcije

$$F(x, y, z) = \frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}, \quad x>0, \quad y>0, \quad z>0 .$$

Na osnovu Košijeve nejednakosti dobijamo

$$\frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6} \geq \sqrt[6]{x\left(\frac{y}{2}\right)^2\left(\frac{z}{3}\right)^3} ,$$

gdje znak jednakosti važi ako i samo ako je $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, pa je

$$\frac{x+y+z}{6} \geq \sqrt[6]{\frac{xy^2z^3}{108}} ,$$

odnosno

$$\frac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3} \geq \frac{6^6}{108} = 432 ,$$

dakle, $\min f(x, y, z) = 432$.

Primjer 6. Dokazati da su sve vrijednosti funkcije

$$F(x, y, z, t) = \frac{(x+y+z+t)^{10}}{xy^2z^3t^4}, \quad x>0, \quad y>0, \quad z>0, \quad t>0$$

veće od $\frac{1}{3}\cdot 10^6$.

Primjenom Košijeve nejednakosti dobijamo

$$\frac{x+y+z+t}{10} = \frac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{t}{4}+\frac{t}{4}+\frac{t}{4}+\frac{t}{4}}{10} \geq \sqrt[10]{x\left(\frac{y}{2}\right)^2\left(\frac{z}{3}\right)^3\left(\frac{t}{4}\right)^4}$$

gdje znak jednakosti važi ako i samo ako je $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{t}{4}$, pa je

$$\frac{x+y+z+t}{10} \geq \sqrt[10]{\frac{xy^2z^3t^4}{27648}} ,$$

odnosno

$$\frac{(x+y+z+t)^{10}}{xy^2z^3t^4} \geq \frac{10^{10}}{27648} > \frac{10^{10}}{3\cdot 10^4} = \frac{1}{3}\cdot 10^6 .$$

2.3. Primjenom nekih jednostavnih i očiglednih jednakosti i identičnosti moguće je naći ekstremne vrijednosti nekih funkcija. Takva je jednakost

$$F(x, y, z, ...) = f(x, y, z, ...) + g(x, y, z, ...) ,$$

gdje je funkcija $g(x, y, z, ...)$ konstantnog znaka, na primjer ≥ 0, za $(x, y, z, ...) \in D_1 \subset D$, D je oblast definisanosti jednakosti, a znak jednakosti važi sa neku tačku $(x_0, y_0, z_0, ...) \in D_1$. Koristeći ovu jednakost mogu se rješavati sljedeći tipovi zadataka:

1) Ako je $f(x, y, z, ...) = \text{const.}$, naći $\min F(x, y, z, ...)$ za $(x, y, z, ...) \in D_1$, i

2) Ako je $F(x, y, z, ...) = \text{const.}$, naći $\max f(x, y, z, ...)$ za $(x, y, z, ...) \in D_1$.

Naime, zbog $g(x, y, z, ...) \geq 0$ imamo $F(x, y, z, ...) \geq f(x, y, z, ...)$ za $(x, y, z, ...) \in D_1$, a znak jednakosti važi za $(x_0, y_0, z_0, ...) \in D_1$ i tada je $g(x_0, y_0, z_0, ...) = 0$.

Primjer 7. Proizvod dva pozitivna broja $x \cdot y = p^2 = \text{const.}$ Naći $\min(x+y)$.

Koristeći očiglednu identičnost

$$(x+y)^2 \equiv 4xy + (x-y)^2, \ \ x > 0, \ \ y > 0,$$

odnosno

$$(x+y)^2 \equiv 4p^2 + (x-y)^2$$

imamo

$$(x+y)^2 \geq 4p^2.$$

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $x - y = 0$, dakle $x = y$ i $\min(x+y) = 2p$.

Primjer 8. Zbir dva pozitivna broja $x + y = 2s = \text{const.}$ Naći $\max(x \cdot y)$.

Koristeći istu identičnost u ovom slučaju imamo $4s^2 \geq 4xy$. Znak jednakosti važi ako i samo ako je $x = y = s$ i $\max(x \cdot y) = s^2$.

2.4. Ako je funkcija zadata jednačinom (formulom) $y = f(x)$ koju možemo riješiti po *x*, tj. možemo naći inverznu funkciju $x = g(y)$, onda nalazeći oblast definisanosti funkcije $x = g(y)$ našli smo oblast vrijednosti polazne funkcije $y = f(x)$. To nam omogućuje da jednostavno nađemo ekstremne vrijednosti funkcije $y = f(x)$ na određenom odsječku.

Primjer 9. Naći $\max y = M$ i $\min y = m$, ako je $y = \dfrac{6x}{1+x^2}$.

Funkcija je definisana za $x \in R$. Za $x = 0$ je i $y = 0$. Neka je $y \neq 0$. Tada je

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 - y^2}}{y} \equiv g(y).$$

Oblast definisanosti funkcije $g(y)$ nalazimo iz nejednakosti $9 - y^2 \geq 0$. Oblast definisanosti funkcije $g(y)$ je segment $-3 \leq y \leq 3$. Dakle, oblast vrijednosti funkcije y je $-3 \leq y \leq 3$. Prema tome, $M = 3$ i $m = -3$.

3. Veoma je značajno ako se jedan isti zadatak uradi na više načina. To obogaćuje nastavni proces. Metode je moguće porediti, a raznovrsnost matematičkog rasuđivanja i zaključivanja dolazi do punog izražaja.

Primjer 10. Odrediti dimenzije pravougaone parcele površine a^2 tako da bi cijena ograde bila minimalna.

Dakle, treba odrediti dimenzije pravougaonika fiksne površine $P = a^2$ tako da bi obim O bio najmanji. Ako je *x* dužina jedna stranice, onda je $P = a^2 = x \cdot \dfrac{a^2}{x}$ i dužina druge stranice je $\dfrac{a^2}{x}$. Obim je

$$O(x) = O = 2\left(x + \frac{a^2}{x}\right).$$

Izračunajmo $\min O(x)$ na nekoliko načina.

I – $O'(x) = 2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$, $0 < x < \infty$. Nule prvog izvoda su $x_1 = a$ i $x_2 = -a$. Zbog prirode zadatka odbacuje se $x_2 = -a$. Budući da je $O'(a-h) < 0$ a $O'(a+h) > 0$, to je $\min O(x) = O(a) = 4a$, $x \in (0, \infty)$. Dakle, radi se o kvadratu.

II – Iz $O(x) = 2\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = 2\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4a \geq 4a$ dobijamo da se postiže $\min O(x) = O(a) = 4a$ za $\left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$, odnosno $x = a$.

III – Neka je x dužina jedna a $p - x$ dužina druge stranice, $p = \frac{O}{2}$. Tada je $a^2 = x(p - x)$ ili $x^2 - px + a^2 = 0$. Napišemo li ovu jednačinu u obliku $(x - a)^2 + x(2a - p) = 0$, imaćemo $2a - p \leq 0$, tj. $p \geq 2a$. Dakle, $p = 2a$ je najmanja vrijednost, odnosno $\min O(x) = O(a) = 4a$.

IV – Neka su x i y stranice pravougaonika. Tada je $x \cdot y = a^2$. Iskoristimo li očigledan identitet

$$(x + y)^2 \equiv (x - y)^2 + 4xy \equiv (x - y)^2 + 4a^2,$$

imaćemo $(x + y)^2 \geq 4a^2$, a znak jednakosti važi ako i samo ako je $x - y = 0$, tj. $x = y = a$. Dakle, $\min O(x) = O(a) = 4a$.

V – Neka su x i y stranice pravougaonika. Tada je $x \cdot y = a^2$. Pretpostavimo da je $x \geq y$, recimo $x = a + b,\ b \geq 0$. Tada je

$$y = \frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b.$$

Znači, $x + y \geq (a + b) + (a - b) = 2a$ tj. $x + y \geq 2a$. Ako je $x = y$, onda je $x + y = 2a$. Sada iz $x + y \geq 2a \ \wedge\ x + y = 2a$ zaključujemo da je $x = y = a$. Dakle, $\min O(x) = O(a) = 4a$.

VI – Iz uslova da jednačina $2\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = \beta$, odnosno $2x^2 - \beta x + 2a^2 = 0$, ima dvostruko rješenje $D \equiv \beta^2 - 16a^2 = 0$, dobijamo $\beta = 4a$. Dakle, $\min O(x) = O(a) = 4a$.

4. Zadatke treba vezivati za konkretne situacije iz svakodnevnog života i prakse. Na taj način dolazi do izražaja povezanost matematike sa stvarnošću, pa se interes učenika sigurno povećava. U tom smislu posmatrajmo sljedeća dva primjera.

Primjer 11. Naći ekstremnu vrijednost funkcije $S(x) = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2px,\ p = \text{const}.$

Kako je $S(x) = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{2p}{4+\pi}\right)^2 + \frac{2p^2}{4+\pi}$, to na osnovu poznatih osobina kvadratne funkcije zaključujemo

$$\max S(x) = S\left(\frac{2p}{4+\pi}\right) = \frac{2p^2}{4+\pi}.$$

Primjer 12. Prozorsko okno ima oblik pravougaonika koji se odozgo završava polukrugom. Ako je obim okna fiksiran i jednak 2*p*, odrediti njegove dimenzije tako da bi propuštalo najveću količinu svjetlosti.

Okno će propuštati najveću količinu svjetlosti kada je njegova površina najveća. Označimo njegovu širinu sa 2*x*, a visinu do polukruga *y*. Tada je njegova površima

$$S = 2xy + \frac{\pi x^2}{2},\ 2x + 2y + \pi x = 2p.$$

Eliminacijom *y* dobijamo

$$S(x) = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2px.$$

Dalju tok rješavanja je kao u prethodnom primjeru.

Upoređivanjem ova dva primjera zaključujemo da se radi o nalaženju maksimuma jedne iste funkcije, ali situacija u drugom primjeru je praktičnog karaktera, dakle, svakodnevna.

Ograničavajući se na određene tipove elementarnih problema, prepuštamo čitaocu da se iz odgovarajuće literature (stručnih časopisa, zbirki zadataka i drugih knjiga) upozna i sa drugim metodama rješavanja takvih problema.