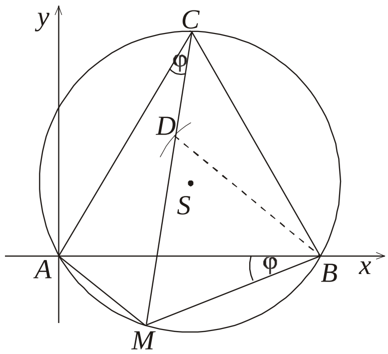
2.7. DEVET RJEŠENJA JEDNOG ZADATKA IZ GEOMETRIJE*)

Riječ je o sljedećem zadatku iz geometrije:
Oko jednakostraničnog trougla ΔABC opisana je kružnica. Dokazati da svaka tačka M luka $\overset{\frown}{AB}$ ima osobinu $\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{MC}$.

Daćemo devet različitih rješenja ovog zadatka, čisto geometrijskih, pomoću trigonometrije, pomoću vektora i analitičke geometrije.

Dokaz 1.Naravno, tača M pripada luku $\overset{\frown}{AB}$ kome ne pripada tačka C (vidi sl.1). Na duži CM odredimo tačku D, tako da bude $\overline{BM}=\overline{BD}$. Uglovi $\measuredangle BAM$ i $\measuredangle BCD$ su jednaki kao periferijski nad istom tetivom MB. Pošto su uglovi $\measuredangle DMB$ i $\measuredangle BAC=60^0$ jednaki (kao periferijski nad tetivom BC), to je $\measuredangle DMB=60^0$, pa je trougao ΔMBD (zbog $\overline{BM}=\overline{BD}$) jednakostranični. To znači da je $\measuredangle BDC=120^0$, a i $\measuredangle AMB=120^0$, jer je $\measuredangle AMC=\measuredangle ABC=60^0$ kao periferijski nad tetivom AC (a i zbog toga što je četverougao $AMBC$ tetivni). Svakako $\overline{AB}=\overline{BC}$, pa su trouglovi ΔAMB i ΔCDB podudarni, odakle slijedi da je $\overline{CD}=\overline{AM}$.
Sada imamo: $\overline{MC}=\overline{CD}+\overline{DM}=\overline{MA}+\overline{MB}$ što je i trebalo dokazati.



sl.1.

Dokaz 2. Na osnovu **Ptolemejeve teoreme** primijenjene na tetivni četverougao $AMBC$ imamo:

$$\overline{AM}\cdot\overline{BC}+\overline{MB}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}\cdot\overline{MC}. \qquad (1)$$

Kako je $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=a$, iz (1) slijedi:

$$a\cdot\overline{AM}+a\cdot\overline{MB}=a\cdot\overline{MC}$$

ili nakon dijeljenja sa a: $\overline{MA}+\overline{MB}=\overline{MC}$, što je i trebalo dokazati.

*) Koautor Alija Muminagić, Nykøbing F., Danska

Dokaz 3. Neka je $AB \cap CM = \{K\}$. Očigledno, $\Delta AKM \sim \Delta BCK$ (jer imaju jednake uglove) pa iz te sličnosti slijedi:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CK}} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AK}}{\overline{CK}} . \tag{2}$$

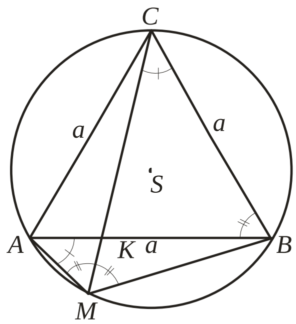
Iz sličnosti trouglova $\Delta MKB \sim \Delta ACK$ (trouglovi imaju jednake uglove) slijedi:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}} \Rightarrow \overline{MB} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BK}}{\overline{CK}} . \tag{3}$$

Sabiranjem jednakosti (2) i (3) dobijamo:

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AK}}{\overline{CK}} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BK}}{\overline{CK}} = (\text{zbog } \overline{BC} = \overline{AC} = a) =$$

$$= \frac{a\left(\overline{AK} + \overline{BK}\right)}{\overline{CK}} = (\text{zbog } \overline{AK} + \overline{BK} = \overline{AB} = a) = \frac{a^2}{\overline{CK}} .$$



sl.2

Dakle,

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \frac{a^2}{\overline{CK}} . \tag{4}$$

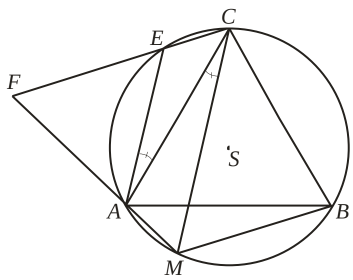
Osim toga je i $\Delta MCB \sim \Delta KCB$ (jer je $\measuredangle C$ zajednički, a $\measuredangle BMC = \measuredangle BAC = \measuredangle ABC =$
$= \measuredangle KBC = 60^0$), pa je

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CK}} \Rightarrow \overline{MC} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{CK}} = (\text{zbog } \overline{BC} = a) = \frac{a^2}{\overline{CK}} . \tag{5}$$

Konačno, iz (4) i (5) slijedi:

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}\text{, q.e.d.}$$

Dokaz 4. Uzmimo tačku E na opisanoj kružnici oko trougla ΔABC, takvu da je $\overline{CE} = \overline{AM}$. Produžimo CE preko tačke E i MA preko tačke A i presječnu tačku označimo sa F (sl.3). Zbog $\overline{CE} = \overline{AM}$ je $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{AM}$ pa je i $\measuredangle CAE = \measuredangle ACM$, a zbog toga je $AE \| MC$. Tako je četverougao $CEAM$ jednakokraki trapez i $\measuredangle AMC = \measuredangle MCE = 60^0$ (jer je $\measuredangle AMC = \measuredangle ABC = 60^0$). Ovo pak znači da je trougao ΔMCE jednakostranični. Zbog $AE \| MC$ je i trougao ΔAEF jednakostranični, pa je $\overline{FA} = \overline{FE}$.



sl.3

Dalje imamo da je:

$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CA} - \overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB},$$

pa je $\overline{AE} = \overline{MB}$. Sada je dakle:

$$\overline{FA} + \overline{AM} = \overline{AE} + \overline{AM} = \overline{MB} + \overline{MA},$$

a u jednakostraničnom trouglu ΔMCF je:

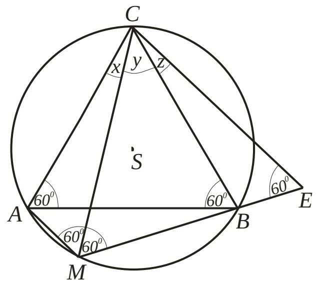
$$\overline{FA} + \overline{AM} = \overline{FM} = \overline{MC},$$

pa iz dvije posljednje jednakosti slijedi da je:

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}\text{, q.e.d.}$$

Dokaz 5. Produžimo MB preko tačke B do tačke E tako da je $\overline{MC} = \overline{ME}$ (sl.4). Zbog $\measuredangle CME = 60^0$ i $\overline{MC} = \overline{ME}$, trougao ΔCME je jednakostraničan. Neka je $\measuredangle ACM = x, \measuredangle MCB = y$ i $\measuredangle BCE = z$. Imamo da je $x + y = 60^0$ i $y + z = 60^0$, pa je

$x = z$. Sada je $\measuredangle AMC = 60^0 = \measuredangle BEC$, $\measuredangle ACM = x = z = \measuredangle BCE$, te $\overline{MC} = \overline{EC} = \overline{ME}$ pa je $\Delta MCA \cong \Delta BEC$ i iz podudarnosti tih trouglova slijedi da je $\overline{MA} = \overline{BE}$.



sl.4

Tako je sada:

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{BE} + \overline{MB} = \overline{ME} = \overline{MC}\text{, tj.}$$

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MC}\text{, q.e.d.}$$

Dokaz 6. Na osnovu **kosinusne teoreme** primijenjene na trouglove ΔAMC i na ΔMBC, dobijamo:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MC} \cdot \cos\measuredangle AMC,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - 2 \cdot \overline{MB} \cdot \overline{MC} \cdot \cos\measuredangle CMB.$$

Kako je $\measuredangle AMC = \measuredangle CMB = 60^0$ (vidi dokaz 1.) to imamo:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{AM} \cdot \overline{MC}\text{, te}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{MB} \cdot \overline{MC}.$$

Oduzimajući ove jednakosti (gdje je $\overline{AC} = \overline{BC}$) dobijamo:

$$0 = \overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MC} \cdot (\overline{AM} - \overline{MB}),$$

a odavde nakon dijeljena sa $\overline{AM} - \overline{MB} \neq 0$ imamo:

$$0 = \overline{AM} + \overline{MB} - \overline{MC}\text{ i konačno:}$$

$\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{MC}$, što je i trebalo dokazati.

(U slučaju $\overline{AM}-\overline{MB}=0$, tj. $\overline{MA}=\overline{MB}$ lako se pokazuje da je $\overline{MC}=2\overline{MS}=\overline{MS}+\overline{MS}=\overline{MA}+\overline{MB}$.)

Dokaz 7. Neka je $\measuredangle MCA=\varphi$ (sl.1). Ugao $\measuredangle MBA$ je jednak također φ (kao periferijski nad tetivom *AM*). Poznata nam je veza između stranice trougla, sinusa naspramnog ugla i poluprečnika opisane kružnice (sinusna teorema). Iz trouglova ΔAMC i ΔBMC dobijamo (*R* je poluprečnik opisane kružnice tim trouglovima):

$$\overline{MA}=2R\sin\varphi,\quad \overline{MB}=2R\sin(60^0-\varphi)\ \text{ i }\ \overline{MC}=2R\sin(60^0+\varphi).$$

Odavde je:

$$\overline{MA}+\overline{BM}=2R\left[\sin\varphi+\sin(60^0-\varphi)\right]=2R\cdot 2\sin 30^0\cos(\varphi-30^0)=$$
$$=2R\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\sin\left[90^0+(\varphi-30^0)\right]=2R\sin(60^0+\varphi)=\overline{MC},$$

što je i trebalo dokazati.

Dokaz 8. Primijenićemo metodu **analitičke geometrije**. Uvedimo (sl.1) pravougli koordinatni sistem sa koordinatnim početkom u *A*, tako da je: $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$ i $M(x>0,\ y<0)$. Lako se dobija da je centar kružnice $S\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, a njen je poluprečnik $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Jednačina kružnice glasi:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{a^2}{3}, \qquad (5)$$

ili

$$x^2+y^2-ax-\frac{a\sqrt{3}}{3}y=0.$$

Dokazaćemo da je

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}, \qquad (6)$$

odnosno $\overline{AM}+\overline{BM}=\overline{CM}$ pošto je:

$$\overline{AM}=\sqrt{x^2+y^2},\ \overline{MB}=\sqrt{(x-a)^2+y^2},\ \overline{CM}=\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}.$$

Neka je

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ , a } D = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} \text{ .}$$

Imamo:

$$L^2 = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 2x^2 + 2y^2 -$$

$$-2ax + a^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax + a^2)} = 2x^2 + 2y^2 - 2ax + a^2 +$$

$$+2\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + a^2x^2 + a^2y^2} = (x^2 + y^2 - ax) +$$

$$+(x^2 + y^2 - ax) + a^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 - ax)^2 + a^2y^2} \text{ .}$$

Iz (5) je $x^2 + y^2 - ax = \frac{a\sqrt{3}}{3}y$, pa je sada:

$$L^2 = x^2 + y^2 - ax + \frac{a\sqrt{3}}{3}y + a^2 + 2\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}y}{3}\right)^2 + a^2y^2} =$$

$$= x^2 + y^2 - ax + \frac{a\sqrt{3}}{3}y + a^2 + 2\sqrt{\frac{4}{3}a^2y^2} =$$

$$= x^2 + y^2 - ax + \frac{a\sqrt{3}}{3}y + a^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}ay,$$

(jer je $\sqrt{y^2} = -y$ zbog $y<0$).
Dakle, konačno je:

$$L^2 = x^2 + y^2 - ax - \sqrt{3}ay + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 = D^2 \text{ .}$$

Odavde slijedi da je $L=D$ (jer su $L,D>0$), a time je dokazano (6), odnosno $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{CM}$.

Dokaz 9. Poslužićemo se **vektorskom metodom**. Imamo (sl.5):

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SB}, \quad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} \text{ ,}$$

odnosno

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MS}\right|^2 + \left|\overrightarrow{SA}\right|^2 + 2\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{SA},$$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MS}\right|^2 + \left|\overrightarrow{SB}\right|^2 + 2\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{SB},$$

$$\left|\overrightarrow{MC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MS}\right|^2 + \left|\overrightarrow{SC}\right|^2 + 2\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{SC}.$$

Zbog $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \left|\overrightarrow{SA}\right| = \left|\overrightarrow{SB}\right| = \left|\overrightarrow{SC}\right| = R$, imamo

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = 2R^2 + 2\left|\overrightarrow{MS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SA}\right|\cos\angle(\overrightarrow{MS},\overrightarrow{SA}),$$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = 2R^2 + 2\left|\overrightarrow{MS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|\cos\angle(\overrightarrow{MS},\overrightarrow{SB}),$$

$$\left|\overrightarrow{MC}\right|^2 = 2R^2 + 2\left|\overrightarrow{MS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|\cos\angle(\overrightarrow{MS},\overrightarrow{SC}),$$

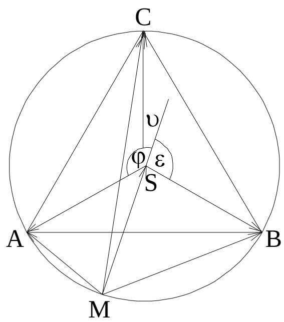
odnosno

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = 2R^2 + 2R^2\cos\varphi = 2R^2(1+\cos\varphi) = 4R^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = 2R^2 + 2R^2\cos\varepsilon = 2R^2(1+\cos\varepsilon) = 4R^2\cos^2\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\overrightarrow{MC}\right|^2 = 2R^2 + 2R^2\cos\vartheta = 2R^2(1+\cos\vartheta) = 4R^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Odavde je:



sl.5.

$$\overline{MA} = \left|\overrightarrow{MA}\right| = 2R\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$\overline{MB} = \left|\overrightarrow{MB}\right| = 2R\cos\frac{\varepsilon}{2}, \tag{7}$$

$$\overline{MC} = \left|\overrightarrow{MC}\right| = 2R\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Dokazaćemo da je

$$\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varepsilon}{2} = \cos\frac{\vartheta}{2}. \tag{8}$$

Pošto je (vidi sl.5): $\varphi+\varepsilon=240^0$ i $\vartheta=\varphi-120^0$ to sada imamo:

$$cos\frac{\varphi}{2}+cos\frac{\varepsilon}{2}=cos\frac{\varphi}{2}+cos(120^0-\frac{\varphi}{2})=cos\frac{\varphi}{2}+cos120^0\cdot cos\frac{\varphi}{2}+$$

$$+sin120^0\cdot sin\frac{\varphi}{2}=cos\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{2}cos\frac{\varphi}{2}+sin120^0\cdot sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}cos\frac{\varphi}{2}+$$

$$+sin60^0\cdot sin\frac{\varphi}{2}=cos60^0\cdot cos\frac{\varphi}{2}+sin60^0\cdot sin\frac{\varphi}{2}=cos(\frac{\varphi}{2}-60^0)=cos\frac{\vartheta}{2}.$$

Time je dokazano (8). Iz (7) i (8) slijedi:

$$2R\cos\frac{\varphi}{2}+2R\cos\frac{\varepsilon}{2}=2R(cos\frac{\varphi}{2}+cos\frac{\varepsilon}{2})=2R\cos\frac{\vartheta}{2} \text{ ili } \overline{MA}+\overline{MB}=\overline{MC},$$

što je i trebalo dokazati.

LITERATURA

[1] **Arslanagić, Š.**, *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2001.

[2] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3] **Arslanagić, Š., Milošević, D.**, *Šest rješenja jednog zadatka iz geoemtrije*, Matematičko-fizički list, Vol.33, Nr. 1/132 (1982/83).

[4] **Engel, A.**, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] **Marić, A.**, *Planimetrija – Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.

2.8. GENERALIZACIJA VAN SCHOOTENOVE*) TEOREME

U [3] je dato devet raznih rješenja jednog zadatka iz geometrije koji glasi:

Oko jednakostraničnog trougla ΔABC opisana je kružnica. Dokazati da za svaku tačku M luka $\overset{\frown}{AC}$ kome ne pripada tačka B, tj. tačke B i M su sa raznih strana prave AC, važi jednakost $\overline{MA}+\overline{MC}=\overline{MB}$, (sl.1)

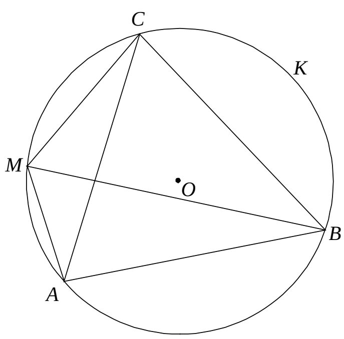
U matematičkoj literaturi ova činjenica je poznata kao Van Schootenova teorema.

Sada ćemo dati generalizaciju Van Schootenove teoreme koja glasi:

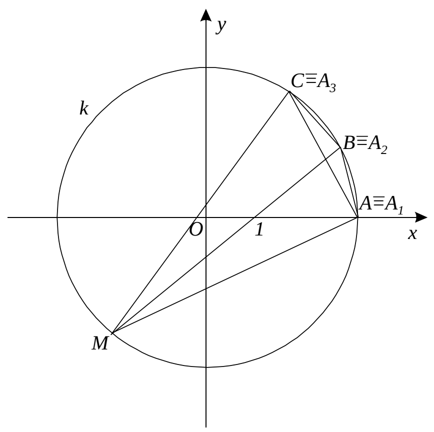
Neka su tačka A,B,C tri uzastopna vrha pravilnog n- tougla i neka tačka M pripada opisanoj kružnici tom n-touglu i pri tome su tačke B i M sa raznih strana prave AC. Tada važi jednakost:

$$\overline{MA}+\overline{MC}=2\overline{MB}\cos\frac{\pi}{n}. \qquad (1)$$

Dokaz: Posmatrajmo kompleksnu ravan sa koordinatnim početkom u tački O koja je centar opisane kružnice k pravilnom n- touglu i neka je 1 koordinata vrha $A_1 \equiv A$ mnogougla $A_1A_2\cdots A_n$ (sl.2).



sl.1



sl.2

Ako je $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ tada je ε^{k-1} koordinata tačke A_k, $(k=1,2,3,\dots,n)$.

*) Franz Van Schooten, 1615.-1666., holandski matematičar

Ne umanjujući općenitost, pretpostavićemo da je $A \equiv A_1$, $B = A_2$ i $C \equiv A_3$. Neka je $z_M = cos\,t + i\,sin\,t;\ t \in [0, 2\pi)$ koordinata tačke $M \in k$. Budući da su tačke B i M sa raznih strana prave AC, to slijedi da je $\frac{4\pi}{n} < t$. Tada je

$$\overline{MA} = |z_M - 1| = \sqrt{(cos\,t - 1)^2 + sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\,cos\,t} = 2\,sin\frac{t}{2};$$

$$\overline{MB} = |z_M - \varepsilon| = \sqrt{\left(cos\,t - cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \left(sin\,t - sin\frac{2\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2\left(cos\,t\,cos\frac{2\pi}{n} + sin\,t\,sin\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{2\left[1 - cos\left(t - \frac{2\pi}{n}\right)\right]} = 2\,sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n}\right);$$

$$\overline{MC} = |z_M - \varepsilon^2| = \left|cos\,t + i\,sin\,t - \left(cos\frac{4\pi}{n} + i\,sin\frac{4\pi}{n}\right)\right|$$

$$= \sqrt{\left(cos\,t - cos\frac{4\pi}{n}\right)^2 + \left(sin\,t - sin\frac{4\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2\left(cos\,t\,cos\frac{4\pi}{n} + sin\,t\,sin\frac{4\pi}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{2\left[1 - cos\left(t - \frac{4\pi}{n}\right)\right]} = 2\,sin\left(\frac{t}{2} - \frac{2\pi}{n}\right).$$

Jednakost (1), tj. $\overline{MA}+\overline{MC}=2\overline{MB}\cos\frac{\pi}{n}$ je sada ekvivalentna jednakosti:

$$2\sin\frac{t}{2}+2\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)=4\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$$

koja je tačna jer slijedi nakon pretvaranja zbira na njenoj lijevoj strani u proizvod, tj.:

$$2\sin\frac{t}{2}+2\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{2\pi}{n}\right)=$$

$$=2\cdot 2\sin\frac{\frac{t}{2}+\frac{t}{2}-\frac{2\pi}{n}}{2}\cos\frac{\frac{t}{2}-\frac{t}{2}+\frac{2\pi}{n}}{2}$$

$$=4\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}\ .$$

Sada ćemo dati tri posljedice jednakosti (1).

Posljedica 1. Za $n=3$, dobijamo iz (1):

$$\overline{MA}+\overline{MC}=2\overline{MB}\cos\frac{\pi}{3},$$

odnosno

$$\overline{MA}+\overline{MC}=\overline{MB},$$

a ovo je Van Schoutenova teorema.

Posljedica 2. Za $n=4$, tada za tačku M koja pripada opisanoj kružnici k kvadrata $ABCD$, i pri tome su tačke B i M sa raznih strana prave AC, slijedi iz (1):

$$\overline{MA}+\overline{MC}=2\overline{MB}\cos\frac{\pi}{4},$$

odnosno

$$\overline{MA}+\overline{MC}=\sqrt{2}\,\overline{MB}\,.$$

Posljedica 3. Za $n=6$, za tačku M koja pripada kružnici k opisanoj pravilnom šestouglu $ABCDEF$, gdje su tačke B i M sa raznih strana prave AC, dobijamo iz (1):

$$\overline{MA}+\overline{MC}=2\overline{MB}\cos\frac{\pi}{6},$$

odnosno

$$\overline{MA}+\overline{MC}=\sqrt{3}\,\overline{MB}.$$

L I T E R A T U R A

[1] **T. Andreescu, D. Andrica**, *Complex Numbers from A to ... Z,* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2004.

[2] **Š. Arslanagić**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[3] **Š. Arslanagić**, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

O JEDNOJ ZNAČAJNOJ OSOBINI TEŽIŠNICA TROUGLA

Dr. Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

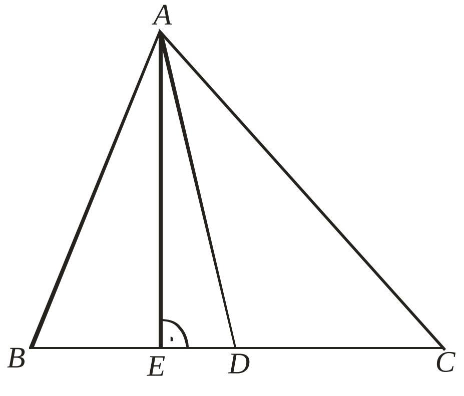
U ovom članku ćemo dati neke značajne osobine težišnica trougla i kroz zadatke ih iskoristiti u svrhu rješavanja tih zadataka. Kroz te osobine bitan momenat će biti površina trougla pa se ne rijetko ova metoda rješavanja zadataka zove «*metoda površina*».

Riječ je o dvije sljedeće tvrdnje:

Neka je AD težišnica trougla ΔABC (tača $D \in BC$ je središte stranice BC tog trougla). Tada je
1^0 $P_{\Delta ABD} = P_{\Delta ACD}$;
2^0 $\overline{BB'} = \overline{CC'}$, gdje su tačke B' i C' podnožja normala povučenih iz vrhova B i C na težišnicu AD.

Dokaz: 1^0 Imamo (sl.1) $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{AE}$, gdje je tačka E podnožje visine iz vrha A na stranicu BC, kao i $P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\overline{DC} \cdot \overline{AE}$ jer je AE visina i trougla ΔACD. Pošto je tačka D središte stranice BC trougla, to je $\overline{BD} = \overline{DC}$ te dobijamo odozgo:

$$P_{\Delta ABD} = P_{\Delta ACD}, \text{ q.e.d.}$$



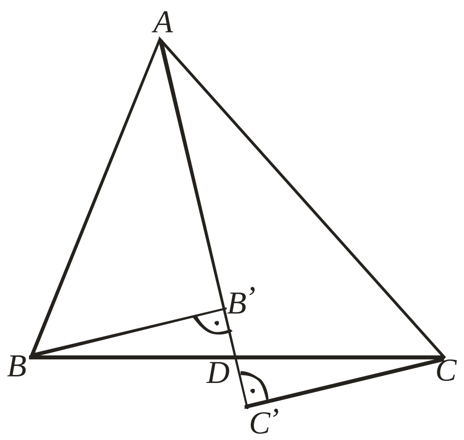
sl.1

2^0 Sada imamo (sl.2):

$$P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{BB'} \quad \text{te} \quad P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{CC'} \,.$$

Pošto je $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\measuredangle BB'D = \measuredangle CC'D = 90^0$ i $\measuredangle BDB' = \measuredangle CDC'$ (unakrsni uglovi), to je $\Delta BB'D \cong \Delta CC'D$ pa je tada

$$\overline{BB'} = \overline{CC'} \text{ , q.e.d.}$$



sl.2

Sada ćemo dati nekoliko zadataka koje ćemo riješiti pomoću prethodno dokazanih tvrdnji 1^0 i 2^0.

Zadatak 1. Neka se tačka M nalazi unutar trougla ΔABC i neka važi jednakost $P_{\Delta ABM} = P_{\Delta ACM}$. Dokazati da tada tačka M pripada težišnici AD tog trougla.

Rješenje: Neke je D' tačka u kojoj prava AM siječe stranicu BC trougla ΔABC (sl.3). Dokazaćemo da je tada $\overline{BD'} = \overline{CD'}$, tj. $D' \equiv D$, gdje je AD težišnica trougla ΔABC . Imamo sada:

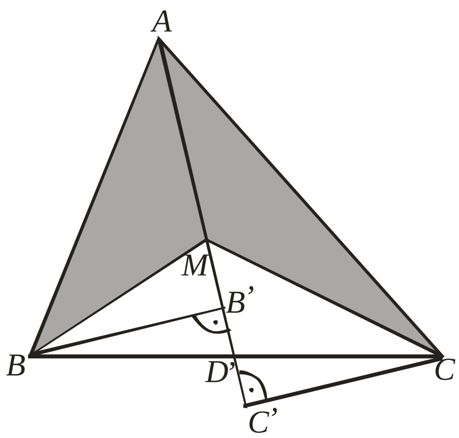
$$P_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{BB'} \text{ i } P_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{CC'}$$

gdje su tačke B' i C' podnožja normala iz vrhova B i C na pravu AD' .
Kako je po pretpostavci zadatka $P_{\Delta ABM} = P_{\Delta ACM}$, to dobijamo odozgo da je:

$$\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{BB'} = \frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{CC'} \,,$$

a odavde

$$\overline{BB'} = \overline{CC'} \ . \qquad (1)$$



sl.3

Pošto su pravougli trouglovi $\Delta BB'D'$ i $\Delta CC'D'$ slični (imaju po dva odgovarajuća ugla jednaka), to vrijedi:

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{CD}} \ . \qquad (2)$$

Sada iz (1) i (2) slijedi:

$$\overline{BD'} = \overline{CD'} \ ,$$

tj. tačka $D' \equiv D$ je središte stranice BC trougla ΔABC pa je duž AD težišnica tog trougla, q.e.d.

Zadatak 2. Neka su tačke A', B', C' simetrične vrhovima trougla A, B, C u odnosu na tačke B, C, A redom kao centrima simetrije. Dokazati da je tada:

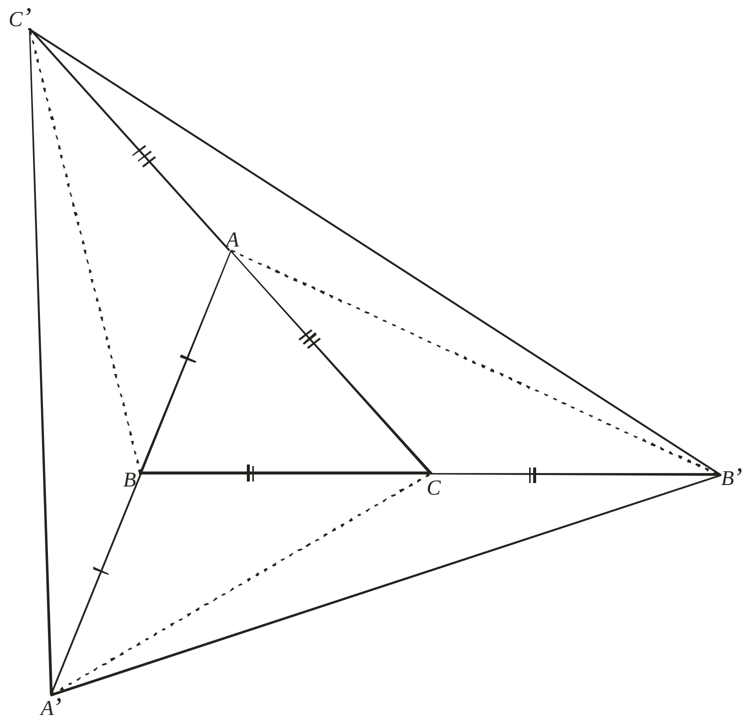
$$P_{\Delta A'B'C'} = 7P_{\Delta ABC} \ .$$

Rješenje: Po pretpostavci u zadatku je tačka B središte duži AA' pa je duž $C'B$ težišnica trougla $\Delta C'A'A$ (sl.4). Sada imamo na osnovu tvrdnje 1^0:

$$P_{\Delta C'AB} = P_{\Delta C'A'B} \ . \qquad (3)$$

Pošto je duž AB težišnica trougla $\Delta C'BC$, to je iz istog razloga, tj. 1^0:

$$P_{\Delta C'AB} = P_{\Delta ABC} \ . \qquad (4)$$



sl.4

Sada iz (3) i (4) dobijamo:

$$P_{\Delta C'A'B} = P_{\Delta ABC}\ , \qquad (5)$$

odnosno zbog (4) i (5):

$$P_{\Delta AA'C'} = P_{\Delta C'A'B} + P_{\Delta C'AB} = 2P_{\Delta ABC}\ . \qquad (6)$$

Analogno dobijamo da je:

$$P_{\Delta BB'A'} = P_{\Delta CC'B'} = 2P_{\Delta ABC}\ . \qquad (7)$$

Imamo sada na osnovu (6) i (7):

$$P_{\Delta A'B'C'} = P_{\Delta AA'C'} + P_{\Delta BB'A'} + P_{\Delta CC'B'} + P_{\Delta ABC} = 7P_{\Delta ABC}\text{, q.e.d.}$$

Zadatak 3. Neka je $ABCD$ konveksan četevrougao, a tačke A', B', C', D' su simetrične vrhovima tog četverougla u odnosu na tačke B, C, D, A redom kao centrima simetrije. Dokazati da je tada:

$$P_{A'B'C'D'} = 5P_{ABCD}\ .$$

Rješenje: Iz istog razloga kao u prethodnom zadatku, tj. na osnovu tvrdnje 1^0 dobijamo (sl.5):

$$P_{\Delta CC'B'} = 2P_{\Delta CDB'} = 2P_{\Delta BCD} \text{ ,}$$

$$P_{\Delta BB'A'} = 2P_{\Delta BCA'} = 2P_{\Delta ABC} \text{ ,}$$

$$P_{\Delta AA'D'} = 2P_{\Delta ABD'} = 2P_{\Delta ABD} \text{ ,}$$

$$P_{\Delta DD'C'} = 2P_{\Delta ADC'} = 2P_{\Delta ADC} \text{ ,}$$

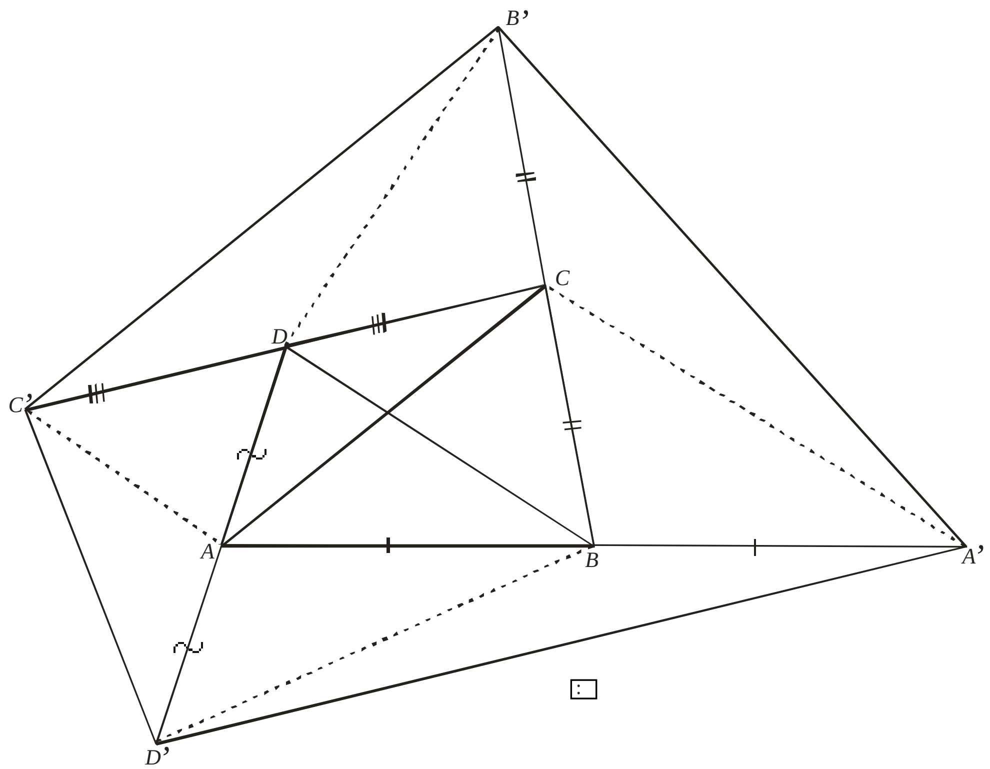
a odavde nakon sabiranja ovih jednakosti

$$P_{\Delta AA'D'} + P_{\Delta BB'A'} + P_{\Delta CC'B'} + P_{\Delta DD'C'} = 2\left(P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ADC} + P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD}\right) \text{ ,}$$

te

$$P_{A'B'C'D'} = 2\left(P_{ABCD} + P_{ABCD}\right) + P_{ABCD} \text{ , tj.}$$

$$P_{A'B'C'D'} = 5P_{ABCD} \text{ , q.e.d.}$$



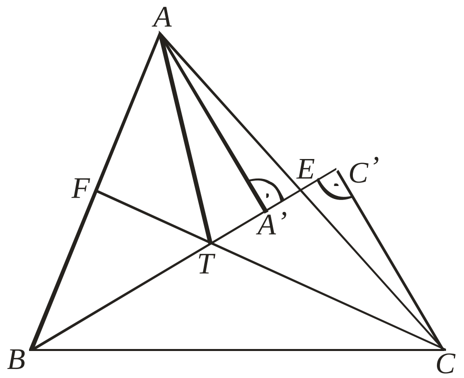
sl.5

Zadatak 4. Koristeći tvrdnje 1^0 i 2^0 dokazati da se težišnice trougla sijeku u jednoj tački (tj. da su konkurentne).

Rješenje: Označimo sa T tačku presjeka težišnica BE i CF trougla ΔABC (sl.6). Dokazaćemo da tačka T pripada i težišnici AD trougla. Na osnovu tvrdnji 1^0 i 2^0, slijedi da je $P_{\Delta ABT} = P_{\Delta BCT}$ jer tačka T pripada težišnici BE trougla ΔABC. Iz istog razloga, pošto tačka T pripada težišnici CF trougla ΔABC slijedi da je $P_{\Delta BCT} = P_{\Delta ACT}$. Iz gornje dvije jednakosti dobijamo da je:

$$P_{\Delta ABT} = P_{\Delta ACT},$$

odakle zaključujemo na osnovu prethodnih osobina da tačka T pripada težišnici iz vrha A. Dakle, težišnice trougla ΔABC se sijeku u jednoj tački, q.e.d.



sl.6

Za vježbu preporučujemo da se riješe sljedeći zadaci:

1. Neka je $ABCD$ konveksan četverougao a tačke A' i B' su simetrične vrhovima A i B u odnosu na vrhove C i D kao centre simetrije. Odrediti omjer površina četverouglova $A'B'AB$ i $ABCD$.

2. Neka je $ABCD$ konveksan četverougao, a tačke M, N, P, Q su središta stranica AB, BC, CD, AD redom. Duži AN, BP, CQ i DM obrazuju svojim presječnim tačkama četverougao $XYZT$ ($AN \cap DM = \{X\}$, $AN \cap BP = \{Y\}$, $BP \cap CQ = \{Z\}$, $CQ \cap DM = \{T\}$). Dokazati da vrijedi jednakost:

$$P_{XYZT} = P_{\Delta AMX} + P_{\Delta BNY} + P_{\Delta CPZ} + P_{\Delta DQT}.$$

3. Neka je ΔABC jednakostranični trougao i tačka M unutar tog trougla. Neka su tačke A', B' i C' podnožja normala povučenih iz tačke M na stranice BC, CA i AB tog trougla. Dokazati da vrijedi jednakost:

$$P_{\Delta AMB'} + P_{\Delta BMC'} + P_{\Delta CMA'} = P_{\Delta A'MB} + P_{\Delta B'MC} + P_{\Delta C'MA}.$$

4. U konveksnom četverouglu $ABCD$ se nalazi tačka M za koju važi jednakost:

$$P_{\Delta MAB} = P_{\Delta MBC} = P_{\Delta MCD} = P_{\Delta MDA}.$$

Dokazati da tada jedna od dijagonala četevrougla polovi drugu dijagonalu.

5. U konveksnom četverouglu $ABCD$ tačke M i N su središta dijagonala AC i BD. Neka je E presječna tačka stranica AB i CD, a F presječna tačka stranica BC i AD četevrougla. Dalje, neka je tačka P središte duži EF. Dokazati da su tačke M, N i P kolinearne (pripadaju istoj pravoj).

6. Neka je četverougao $ABCD$ trapez $(AB \| CD)$. Neka je O presječna tačka njegovih dijagonala AC i BD. Dokazati da je tada $P_{\Delta AOD} = P_{\Delta BOC}$.

7. Neka se tačka M nalazi na stranici BC trougla ΔABC. Kroz tačku M konstruisati pravu koja dijeli taj trougao na dva dijale jednakih površina.

8. Neka je četverougao $ABCD$ trapez $(AB \| CD)$ i tačka $E \in BC$. Prava kroz vrh B koja je paralelna duži DE siječe krak AD trapeza u tački F. Dokazati da su prave AE i CF paralelne.

9. Neka je O presječna tačka dijagonala AC i BD trapeza $ABCD$. Prava povučena kroz tačku O koja je paralelna osnovicama trapeza siječe krake trapeza u tačkama M i N. Dokazati da je $\overline{OM} = \overline{ON}$.

LITERATURA

[1] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] **Enescu, B.**, *Arii*, Editura GIL, Zalau, 2006.
[3] **Marić, A.**, *Planimetrija-zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.