UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

51. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Sarajevo, 16. 4. 2011. godine

I razred

1. Faktorisati izraz:

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

2. Za okruglim stolom sjedi deset učenika. Svaki od učenika zamisli jedan broj i taj broj saopštava samo svojim susjedima (lijevo i desno) da ga pri tome drugi učenici ne čuju. Dakle, svaki učenik saopšti jedan broj i sazna brojeve koje su zamislili njegovi susjedi. Nakon toga, svaki od učenika, idući redom u krug, javno saopšti aritmetičku sredinu dva broja koja je saznao od svojih susjeda. Ako su redom javno saopšteni brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, koji broj je zamislio učenik koji je javno saopštio broj 6?

3. Trougao AOB se rotacijom u ravni oko vrha O za ugao 90° preslikava u trougao A_1OB_1 (pri čemu se tačka A slika u tačku A_1, a tačka B u tačku B_1). Dokazati da je težišnica trougla OAB_1 na stranicu AB_1 normalna na pravu određenu tačkama A_1 i B.

4. Dokazati da za svaki prirodan broj n bar jedan od brojeva

$$A=2n-1,\ B=5n-1,\ C=13n-1$$

nije potpun kvadrat.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta.

SRETNO!

1. Zadatak

Faktorisati izraz:

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

Rješenje:

Primjetimo da vrijedi

$$(a+2b-3c)+(b+2c-3a)+(c+2a-3a)=0.$$

Prema poznatom algebarskom identitetu, ako vrijedi $x+y+z=0$, onda slijedi $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Primjenom ovog identiteta imamo da vrijedi:

$$\begin{aligned}(a+2b-3c)^3&+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3\\&=3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b).\end{aligned}$$

2. Zadatak

Za okruglim stolom sjedi deset učenika. Svaki od učenika zamisli jedan broj i taj broj saopštava samo svojim susjedima (lijevo i desno) da ga pri tome drugi učenici ne čuju. Dakle, svaki učenik saopšti jedan broj i sazna brojeve koje su zamislili njegovi susjedi. Nakon toga, svaki od učenika, idući redom u krug, javno saopšti aritmetičku sredinu dva broja koja je saznao od svojih susjeda. Ako su javno saopšteni brojevi redom $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, koji broj je zamislio učenik koji je javno saopštio broj 6?

Rješenje:

Suma brojeva koje učenik primi je dva puta veća od broja kojeg učenik javno saopšti. Pošto su javno saopšteni brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (redom okruglim stolom), učenik koji je javno izgovorio broj 5, primio je dva broja čija je suma jednaka 10. Njegovi susjedi su javno izgovorili brojeve 4 i 6.

Dakle, ako je učenik koji je javno izgovorio broj 6 odabrao broj x, onda je učenik koji je javno izgovorio broj 4 odabrao broj $10 - x$.

Posmatrajmo sada učenika koji je javno izgovorio broj 3. Taj učenik je primio dva broja čija suma je 6 i jedan od tih brojeva je $10 - x$ (od učenika koji je javno izgovorio broj 4). Drugi broj, koji je primio od učenika koji je javno izgovorio broj 2, jednak je $x - 4$.

Analogno, učenik koji je javno izgovorio broj 8, morao je odabrati broj $12 + x$.

No, učenik koji je javno izgovorio broj 7 je primio dva broja čija suma je 14, tj.

$$x + (12 + x) = 14,$$

tj.

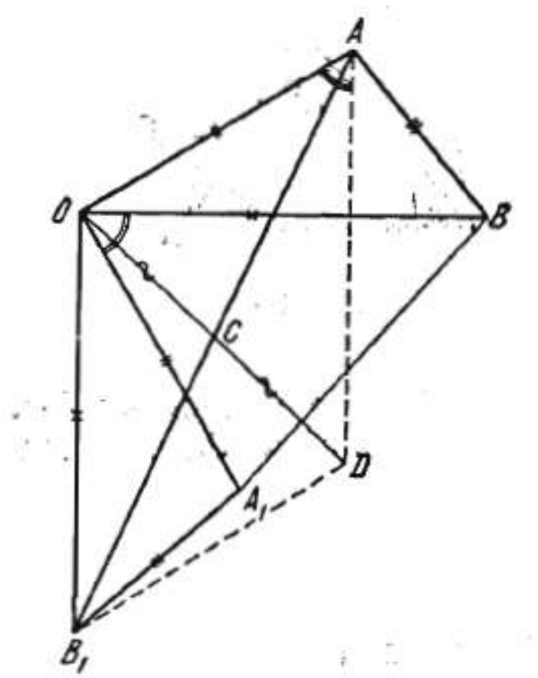
$$x = 1.$$

3. Zadatak

Trougao AOB se rotacijom u ravni oko vrha O za ugao 90° preslikava u trougao A_1OB_1 (pri čemu se tačka A slika u tačku A_1, a tačka B u tačku B_1). Dokazati da je težišnica trougla OAB_1 na stranicu AB_1 normalna na pravu određenu tačkama A_1 i B.

Rješenje:

Neka je OC težišnica trougla OAB_1 na stranicu AB_1. Neka tačka D leži na produžetku OC tako da je $OC = CD$ (vidi sliku). Pokažimo da su trouglovi AOD i OA_1B podudarni. Prema konstrukciji je $AO = OA_1$. Dalje, četverougao AOB_1D je paralelogram (jer mu se dijagonale polove), pa imamo da je $AD = OB_1 = OB$. Napokon, $\angle OAD = \angle A_1OB$ (jer se prema konstrukciji radi o uglovima sa normalnim kracima: $AO \perp OA_1$ i $OB \perp OB_1$) i $AD \| OB_1$. Odatle slijedi da su trouglovi AOD i OA_1B podudarni i dvije stranice jednog od njih su respektivno normalne na dvije stranice drugog trougla. Slijedi da je i treća stranica prvog trougla normalna na preostalu stranicu drugog trougla, tj. $OD \perp A_1B$



4. Zadatak

Za svaki prirodan broj n, bar jedan od brojeva

$$A = 2n - 1, \quad B = 5n - 1, \quad C = 13n - 1$$

nije potpun kvadrat.

Rješenje:

Posmatrajmo n po modulu 4.

- $n \equiv 0\ (mod 4)$ ili $n \equiv 2\ (mod 4) \Longrightarrow A \equiv 3\ (mod 4)$ i A nije potpun kvadrat.
- $n \equiv 3\ (mod 4) \Longrightarrow B \equiv 2\ (mod 4)$ i B nije potpun kvadrat.
- $n \equiv 1\ (mod 4) \Longrightarrow A = 8t + 1$, $B = 4(5t + 1)$, $C = 4(13t + 3)$. Pretpostavimo da su A, B, C potpuni kvadrati.

  Ako je B potpun kvadrat, onda je i broj $(5t + 1)$ potpun kvadrat. Slično, ako je broj C potpun kvadrat, tada i broj $(13t + 3)$ mora biti potpun kvadrat.

  Dakle, vrijedi:

  $$8t + 1 = x^2, \quad 5t + 1 = y^2, \quad 13t + 3 = z^2.$$

  Odavde slijedi:

  $$x^2 + y^2 = z^2 - 1.$$

  No, $z^2 \equiv 0\ (mod 4)$ ili $z^2 \equiv 1\ (mod 4) \Longrightarrow x^2 + y^2 \equiv 0\ (mod 4)$ ili $x^2 + y^2 \equiv 3\ (mod 4)$.

  Odavde zaključujemo da vrijedi:

  $$x^2 + y^2 \equiv 0\ (mod 4).$$

  Dakle,

  $$x^2 \equiv y^2 \equiv 0\ (mod 4),$$

  što je u kontradikcija sa $x^2 = 8t + 1 \equiv 1\ (mod 4)$.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

51. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Sarajevo, 16. 4. 2011. godine

II razred

1. Odrediti koeficijent c polinoma x^2+x+c ako njegove nule x_1 i x_2 zadovoljavaju jednakost:

$$\frac{2x_1^{\ 3}}{2+x_2}+\frac{2x_2^{\ 3}}{2+x_1}=-1.$$

2. Neka je $p>2$ prost broj i neka su m i n prirodni brojevi takvi da je

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}.$$

   Dokazati da je broj m djeljiv brojem p.

3. Neka je I centar upisane kružnice, a O centar opisane kružnice trougla ABC, pri čemu je $\angle ACB=30^\circ$. Na stranicama AC i BC odabrane su tačke E i D redom, tako da vrijedi $EA=AB=BD$. Dokazati da je $DE=IO$ i $p(D,E)\perp p(I,O)$.

4. Neka je n prirodan broj i posmatrajmo skup $S=\{n,n+1,n+2,\ldots,5n\}$.
   a. Dokazati da ako je skup S razbijen na dva disjunktna podskupa, onda postoje tri broja x, y, z (ne obavezno različita) koji pripadaju istom podskupu skupa S i za koje vrijedi $x+y=z$.
   b. Da li tvrdnja pod a. vrijedi ako umjesto skupa S posmatramo skup $S'=\{n,n+1,n+2,\ldots,5n-1\}$? Odgovor obrazložiti!

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta.

SRETNO!

II RAZRED

1. Zadatak

Odrediti koeficijent c polinoma x^2+x+c ako njegove nule x_1 i x_2 zadovoljavaju jednakost:

$$\frac{2x_1^3}{2+x_2}+\frac{2x_2^3}{2+x_1}=-1.$$

<u>Rješenje:</u>

Nakon množenja sa $(2+x_1)(2+x_2)$, data jednakost se transformiše u

$$2x_1^3(2+x_1)+2x_2^3(2+x_2)+(2+x_1)(2+x_2)=0, \text{ tj.}$$

$$4\left(x_1^3+x_2^3\right)+2\left(x_1^4+x_2^4\right)+4+2(x_1+x_2)+x_1x_2=0. \ (1)$$

Dalje je

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2, \ (2)$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2), \ (3)$$

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)-6x_1^2x_2^2. \ (4)$$

Prema Vieteovim pravilima je:

$$x_1+x_2=-1, \ (5)$$

$$x_1x_2=c. \ (6)$$

Uvrštavanjem (2) – (6) u (1), nakon sređivanja, dobije se jednadžba

$$4c^2+5c=0,$$

čija su rješenja $c_1=0$ i $c_2=-\frac{5}{4}$.

2. Zadatak

Neka je $p>2$ prost broj i neka su m i n prirodni brojevi takvi da je

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}.$$

Dokazati da je broj m djeljiv brojem p.

<u>Rješenje:</u>

Koristeći činjenicu da je $p-1$ paran broj, sabiranjem prvog i posljednjeg sabirka, drugog i pretposljednjeg sabirka, itd. Nakon sređivanja se desna strana može napisati u obliku $\frac{pN}{(p-1)!}$, pa slijedi da je

$$pnN=m(p-1)!.$$

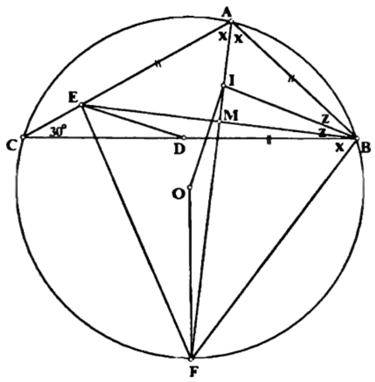
Kako p ne dijeli $(p-1)!$ to p dijeli m, što je i trebalo dokazati.

3. Zadatak

Neka je I centar upisane kružnice, a O centar opisane kružnice trougla ABC, pri čemu je $\sphericalangle ACB = 30^0$. Na stranicama AC i BC odabrane su tačke E i D, respektivno, tako da vrijedi $EA = AB = BD$.

Dokazati da je segment DE jednak i ortogonalan segmentu IO.

Rješenje:



Produžimo AI do presjeka sa opisanom kružnicom u tački F. Iz uslova da je I centar upisane kružnice slijedi da je AI simetrala ugla kod vrha A trougla ABC. Trougao EAB je jednakokraki trougao, pa je AI težišnica, simetrala i visina u tom trouglu. Neka prava AI siječe stranicu EB u njenom središtu M.

Odavde slijedi da je trougao EFB jednakokraki trougao (AM simetrala duži EB).

Sada imamo:

$$\sphericalangle EFB = 2\sphericalangle AFB = 2\sphericalangle ACB = 60^0.$$

Dakle, trougao EFB je jednakokraki trougao sa uglom od 60^0 među svojim krakovima, tj. trougao EFB je jednakostranični trougao, tj. $FB = BE$.

Koristeći činjenicu $FB = FC = FI$, zaključujemo da je trougao IBF jednakokraki (mogli smo računati uglove i zaključiti $\sphericalangle IBF = \sphericalangle BIF = \frac{\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC}{2}$).

Iz posljednja dva zaključka slijedi

$$FI = BE. \quad (1)$$

Tačka F je središte luka $\widehat{BC}$, a odavde slijedi da je FO simetrala tetive BC. Prava AF je simetrala duži BE, pa vrijedi $IF \perp BE$.

Dakle, $\sphericalangle OFI$ i $\sphericalangle EBD$ su uglovi sa normalnim kracima i vrijedi:

$$\sphericalangle OFI = \sphericalangle EBD. \quad (2)$$

Koristeći činjenicu da je centralni ugao dva puta veći od periferijskog ugla imamo da vrijedi $\sphericalangle AOB = 60^0$. Dakle, trougao AOB je jednakostraničan trougao, a odavde slijedi:

$$OA = OB = AB = AE = BD. \quad (3)$$

Iz $(1), (2)$ i (3) zaključujemo da vrijedi $\Delta OFI \cong \Delta EBD$, tj. $IO = ED$ i $\sphericalangle FIO = \sphericalangle BED$.

Iz $\sphericalangle FIO = \sphericalangle BED$ i $FI \perp BD$ slijedi da su i preostala dva kraka ovih uglova ortogonalna, tj. $IO \perp ED$.

4. Zadatak

Neka je n prirodan broj i posmatrajmo skup $S=\{n, n+1, n+2, ..., 5n\}$.

a. Dokazati da ako je skup S razbijen na dva disjunktna podskupa, onda postoje tri broja x, y, z (ne obavezno različita) koji pripadaju istom podskupu skupa S i za koje vrijedi $x+y=z$.

b. Da li tvrdnja pod a. vrijedi ako umjesto skupa S posmatramo skup $S'=\{n, n+1, n+2, ..., 5n-1\}$? Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

a. Neka je skup S razbijen na disjunktne podskupove A i B.

Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi. Neka je $n \in A$. Tada je $2n = n+n \in B$. Otuda slijedi da mora biti $4n = 2n+2n \in A$. Tada je $5n = n+4n \in B$. Sada broj $3n$ pripada ili skupu A ili skupu B. Ako $3n \in A$, onda je $n+3n=4n$, a ako $3n \in B$, onda je $2n+3n=5n$. Konztradikcija sa pretpostavkom pa je treba odbaciti. Dakle, tvrdnja zadatka vrijedi.

b. Ne vrijedi. Posmatrajmo razbijanje na skupove A i B tako da je

$$A=\{n, n+1, ..., 2n-1\} \cup \{4n, 4n+1, ..., 5n-1\} \text{ i } B=\{2n, 2n+1, ..., 4n-1\}.$$

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

51. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Sarajevo, 16. 4. 2011. godine

III razred

1. Odrediti vrijednosti realnog parametra λ za koje jednadžba
$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\lambda$$
ima nulu sadržanu u intervalu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Prirodni brojevi a i b zadovoljavaju sljedeću jednadžbu $a^3+4a=b^2$. Dokazati da je broj a oblika $2t^2$, gdje je t prirodan broj.

3. Neka su AD i BE simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC. Neka su x, y i z udaljenosti od tačke M, koja leži na segmentu DE, do stranica BC, CA i AB, respektivno. Dokazati da vrijedi $z=x+y$.

4. Dokazati da se među svakih 6 iracionalnih brojeva mogu izabrati tri broja a,b,c takva da su brojevi $a+b,\ b+c,\ c+a$ opet iracionalni.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta.

SRETNO!

1. Zadatak

Odrediti vrijednost realnog parametra λ za koje jednačine

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\lambda$$

ima nulu sadržanu u intervalu $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Rješenje:

Lijeva strana jednačine je pozitivna na ovom intervalu, pa slijedi da je $\lambda>0$. Transformacijom početne jednačine imamo:

$$\sin x+\cos x=\lambda\sin x\cos x,$$

a nakon kvadriranja dobivamo:

$$1+2\sin x\cos x=\ \lambda^2 sin^2x\, cos^2x.$$

Uvrštavanjem smjene $\sin 2x=z$ imamo da vrijedi:

$$\lambda^2z^2-4z-4=0,$$

tj.

$$z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}.$$

Prema pretpostavci zadataka $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, odakle slijedi $\sin 2x>0$, tj. $z>0$.

Dakle,

$$z=\frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}\leq 1,$$

tj.

$$\lambda\geq 2\sqrt{2}.$$

2. Zadatak

Prirodni brojevi a i b zadovoljavaju sljedeću jednačinu:

$$a^3 + 4a = b^2.$$

Dokazati da je broj a oblika $2t^2$, gdje je t prirodan broj.

<u>Rješenje:</u>

Neka je u^2 najveći potpun kvadrat koji dijeli a i neka je $a = qu^2$, pri čemu su svi faktori broja q različiti.

Imamo da vrijedi:

$$a(a^2 + 4) = b^2,$$

$$qu^2(q^2u^4 + 4) = b^2,$$

$$u^2|b^2 \Longrightarrow u|b.$$

Neka je $b = ru$.

Nakon uvrštavanje posljednjeg izraza imamo da vrijedi:

$$q(q^2u^4 + 4) = r^2.$$

No, svi faktori broja q su različiti, pa slijedi da se svi faktori broja q moraju pojaviti i u broju $(q^2u^4 + 4)$, tj. $q|(q^2u^4 + 4)$, tj. $q|4$.

Dakle, $q = 1$ ili $q = 2$.

Za $q = 1$ vrijedi:

$$u^4 + 4 = r^2,$$

što nije moguće, jer ne postoje dva potpuna kvadrata koja se razlikuju za 4.

Dakle, $q = 2$ za sve a i b za koje postoje rješenja početne jednačine.

Primjetimo da je $(a, b) = (2, 4)$ jedno rješenje ove jednačine.

Napomena: Može se pokazati da je $(a, b) = (2, 4)$ jedino rješenje ove jednačine u skupu prirodnih brojeva.

3. Zadatak

Neka su AD i BE simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC. Neka su x, y i z udaljenosti od tačke M, koja leži na segmentu DE, do stranica BC, CA i AB, respektivno. Dokazati da vrijedi:

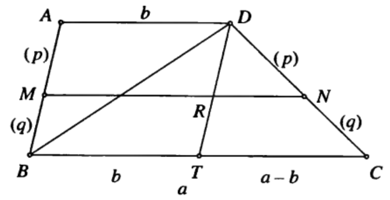
$$z = x + y.$$

Rješenje:

Lema: Neka je $ABCD$ trapez sa paralelnim stranicama $AD = b$ i $BC = a$. Dužina segmenta MN, koji dijeli stranice AB i CD u omjeru $p: q$, iznosi:

$$MN = \frac{ap + bq}{p + q}.$$

Dokaz:



Lako je dokazati da je $MN \parallel BC \parallel AD$ (posmatrati paralelu sa osnovicom kroz tačku M i trouglove ABD i BDC).

Neka je $a > b$. Konstruišimo paralelogram $ABTD$ i označimo presjek pravih MN i DT sa R.

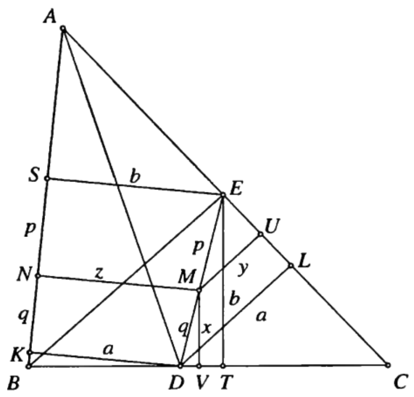
Imamo da vrijedi:

$$\frac{RN}{TC} = \frac{p}{p+q} \Longrightarrow RN = (a-b)\frac{p}{p+q}.$$

$$MN = MR + RN = b + (a-b)\frac{p}{p+q} = \frac{ap+bq}{p+q}.$$

Za $a = b$, četverougao je paralelogram i formula vrijedi.

Vratimo se sada našem početnom problemu. Pretpostavimo da tačka M dijeli segment ED u omjeru $p: q$. Neka su S i K podnožja normala iz tačaka E i D, respektivno, na stranicu AB.



Iz činjenice da vrijedi $MN \parallel ES \parallel DK$ slijedi $\frac{SN}{NK} = \frac{p}{q}$.

Pretpostavimo da je $SE = b$ i $DK = a$. Neka su T i L podnožja normala iz tačaka E i D na stranice BC i AC, respektivno.

Tačke D i E pripadaju simetralama unutrašnjih uglova, pa vrijedi $DL = DK = a$ i $ET = ES = b$.

Primjenjujući lemu zaključujemo:

$$z = \frac{ap + bq}{p + q}.$$

Iz trougla DET slijedi:

$$x = \frac{bq}{p + q}.$$

Analogno, iz trougla EDL slijedi:

$$y = \frac{ap}{p + q}.$$

Kombiniranjem posljednjih jednakosti imamo da vrijedi:

$$z = x + y.$$

4. Zadatak

Dokazati da se među svakih 6 iracionalnih brojeva mogu izabrati tri broja a, b, c takva da su brojevi $a+b, b+c, c+a$ opet iracionalni.

Rješenje:

Lema: Dato je 6 tačaka u ravni, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Ako sve segmente, koje grade ove tačke, bojimo sa dvije boje, onda postoji bar jedan monohromatski trougao (stranice trougla su iste boje).

Dokaz:

Fiksirajmo jednu tačku. Ova tačka gradi 5 segmenata sa ostalim tačkama. Prema Dirihleovom principu, postoje bar tri segmenta iste boje. Neka su ova tri segmenta obojena plavom bojom. Ako bilo koji segment koji nastaje od vrhova plavih segmenata obojim plavom bojom, tada imamo monohromatski trougao. Dakle, svi segmenti koji nastaju ovim vrhovima su crvene boje. No, u tom slučaju imamo crveni monohromatski trougao.

Obojimo segment koji spaja dva iracionalna broja plavom bojom, ako je suma ta dva broja iracionalan broj. Ako je suma dva takva broja racionalan broj, segment bojimo crvenom bojom. Prema lemi, postoji uvijek bar jedan monohromatski trougao. Ako je trougao plave boje, onda je tvrdnja dokazana. Neka je monohromatski trougao crvene boje. Neka su ivice tog trougla $a+b$, $b+c$, $c+a$. Posmatrajmo sada izraz:

$$(a+b)+(b+c)-(c+a)=2b.$$

Odavde slijedi da je b racionalan broj, što je kontradikcija sa pretpostavkom zadatka.

Dakle, $a+b, b+c, c+a$ su iracionalni brojevi.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

51. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Sarajevo, 16. 4. 2011. godine

IV razred

1. Neka su AD i BE simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC. Neka su x, y i z udaljenosti od tačke M, koja leži na segmentu DE, do stranica BC, CA i AB, respektivno. Dokazati da vrijedi $z = x + y$.

2. Ako za realne brojeve x i y vrijedi da je $\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1$, dokazati da vrijedi jednakost
$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.$$

3. Dokazati da je za sve prirodne brojeve n za koje je $n+1$ djeljivo sa 24, zbir svih pozitivnih djelioca broja n također djeljiv sa 24.
(Npr. broj 120 je djeljiv sa 24, a svi pozitivni djelioci broja 120 - 1 = 119 su 1, 7 , 17 i 119 i za njih vrijedi da je njihov zbir 1 + 7 + 17 + 119 = 144 djeljiv sa 24.)

4. Dokazati da se među svakih 6 iracionalnih brojeva mogu izabrati tri broja a, b, c takva da su brojevi $a+b,\ b+c,\ c+a$ opet iracionalni.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme za rad: 3 sata i 30 minuta.

SRETNO!

1. Zadatak

Neka su AD i BE simetrale unutrašnjih uglova trougla ABC. Neka su x, y i z udaljenosti od tačke M, koja leži na segmentu DE, do stranica BC, CA i AB, respektivno. Dokazati da vrijedi:

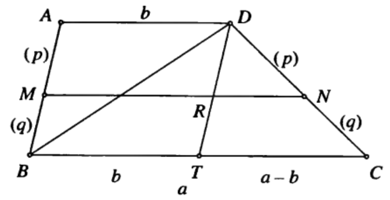
$$z = x + y.$$

Rješenje:

Lema: Neka je $ABCD$ trapez sa paralelnim stranicama $AD = b$ i $BC = a$. Dužina segmenta MN, koji dijeli stranice AB i CD u omjeru $p: q$, iznosi:

$$MN = \frac{ap + bq}{p + q}.$$

Dokaz:



Lako je dokazati da je $MN \parallel BC \parallel AD$ (posmatrati paralelu sa osnovicom kroz tačku M i trouglove ABD i BDC).

Neka je $a > b$. Konstruišimo paralelogram $ABTD$ i označimo presjek pravih MN i DT sa R.

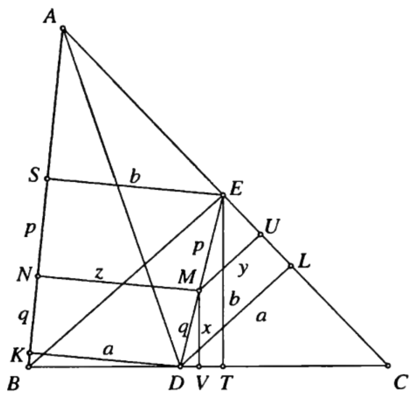
Imamo da vrijedi:

$$\frac{RN}{TC} = \frac{p}{p+q} \Longrightarrow RN = (a - b)\frac{p}{p+q}.$$

$$MN = MR + RN = b + (a - b)\frac{p}{p + q} = \frac{ap + bq}{p + q}.$$

Za $a = b$, četverougao je paralelogram i formula vrijedi.

Vratimo se sada našem početnom problemu. Pretpostavimo da tačka M dijeli segment ED u omjeru $p: q$. Neka su S i K podnožja normala iz tačaka E i D, respektivno, na stranicu AB.



Iz činjenice da vrijedi $MN \parallel ES \parallel DK$ slijedi $\frac{SN}{NK} = \frac{p}{q}$.

Pretpostavimo da je $SE = b$ i $DK = a$. Neka su T i L podnožja normala iz tačaka E i D na stranice BC i AC, respektivno.

Tačke D i E pripadaju simetralama unutrašnjih uglova, pa vrijedi $DL = DK = a$ i $ET = ES = b$.

Primjenjujući lemu zaključujemo:

$$z = \frac{ap + bq}{p + q}.$$

Iz trougla DET slijedi:

$$x = \frac{bq}{p + q}.$$

Analogno, iz trougla EDL slijedi:

$$y = \frac{ap}{p + q}.$$

Kombiniranjem posljednjih jednakosti imamo da vrijedi:

$$z = x + y.$$

2. Zadatak

Ako za realne brojeve x i y vrijedi da je $\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1$, dokazati da vrijedi jednakost

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.$$

Rješenje:

Primijetimo najprije da ne mogu oba broja x i y biti pozitivna. Naime, ako bi to bilo onda bi oba faktora na lijevoj strani $\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1$ bila veća od 1, što je nemoguće.
Zbog simetričnosti, možemo pretpostaviti da je $y \geq x$. Tada mora biti $x<0$.
Pokažimo da ne može biti $y>-x$. Ako bi bilo $y>-x$, onda bi slijedilo $y^2>x^2$.
Tada je

$$y+\sqrt{1+x^2}>-x+\sqrt{1+x^2}>0,$$
$$x+\sqrt{1+y^2}>x+\sqrt{1+x^2}>0.$$

Množenjem ove dvije nejednakosti dobije se

$$1=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)>1+x^2-x^2=1,$$

što je očigledna kontradikcija.
Pokažimo da ne može biti ni $y<-x$. Ako bi bilo $y<-x$, onda bismo imali $x \leq y<-x$, pa bi vrijedilo

$$0<y+\sqrt{1+x^2}<-x+\sqrt{1+x^2},$$
$$0<x+\sqrt{1+y^2}<x+\sqrt{1+x^2}.$$

Množenjem ove dvije nejednakosti dobije se

$$1=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)<1+x^2-x^2=1,$$

što je opet očigledna kontradikcija.
Dakle, mora biti $y=-x$, pa vrijedi

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\left(x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)\left(y+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=$$
$$=\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1,$$

što je i trebalo dokazati.

3. Zadatak

Dokazati da je za sve prirodne brojeve n za koje je $n+1$ djeljivo sa 24, zbir svih pozitivnih djelioca broja n također djeljiv sa 24.

(Npr. broj 120 je djeljiv sa 24, a svi pozitivni djelioci broja $120-1=119$ su $1, 7, 17$ i 119 i za njih vrijedi da je njihov zbir $1+7+17+119=144$ djeljiv sa 24.)

Rješenje:

Ako je $n+1$ djeljivo sa 24, onda je $n=24k-1$, za neki prirodan broj k. Neka su a i b komplementarni djelioci broja n, tj.

$$ab=n=24k-1.$$

Tada brojevi a i b nisu djeljivi sa 2 i 3, jer desna strana nije djeljiva ni sa brojem 2, ni sa brojem 3.

Posmatrajmo proizvod

$$a(a+b)=a^2+ab=a^2-1+24k=(a-1)(a+1)+24k.$$

Broj a nije djeljiv sa 2, pa su brojevi $a-1$ i $a+1$ uzastopni parni brojevi i njihov proizvod je djeljiv sa 8. S druge strane, jedan od brojeva $a-1$, a, $a+1$ je djeljiv sa 3, a kako to nije broj a, to je proizvod $(a-1)(a+1)$ djeljiv i sa 3.

Dakle,

$$24|a(a+b).$$

Iz $(24,a)=1$ slijedi $24|a+b$, tj. zbir dva komplementarna djelioca broja n je djeljiv sa 24.

Ako n nije potpun kvadrat kombiniramo pozitivne djelioce broja n koji su manji od $\sqrt{n}$ sa njihovim pozitivnim komplementarnim djeliocima koji su veći od $\sqrt{n}$. U ovom slučaju, zbir svih pozitivnih djelioca broja n je djeljiv sa 24.

Neka je sada n potpun kvadrat. Tada vrijedi:

$$a^2=24k-1,$$

tj.

$$8|(a-1)(a+1)=24k-2$$

što nije moguće. Kontradikcija sa pretpostavkom da je broj n potpun kvadrat!

4. Zadatak

Dokazati da se među svakih 6 iracionalnih brojeva mogu izabrati tri broja a, b, c takva da su brojevi $a+b, b+c, c+a$ opet iracionalni.

Rješenje:

Lema: Dato je 6 tačaka u ravni, od kojih nikoje 3 nisu kolinearne. Ako sve segmente, koje grade ove tačke, bojimo sa dvije boje, onda postoji bar jedan monohromatski trougao (stranice trougla su iste boje).

Dokaz:

Fiksirajmo jednu tačku. Ova tačka gradi 5 segmenata sa ostalim tačkama. Prema Dirihleovom principu, postoje bar tri segmenta iste boje. Neka su ova tri segmenta obojena plavom bojom. Ako bilo koji segment koji nastaje od vrhova plavih segmenata obojim plavom bojom, tada imamo monohromatski trougao. Dakle, svi segmenti koji nastaju ovim vrhovima su crvene boje. No, u tom slučaju imamo crveni monohromatski trougao.

Obojimo segment koji spaja dva iracionalna broja plavom bojom, ako je suma ta dva broja iracionalan broj. Ako je suma dva takva broja racionalan broj, segment bojimo crvenom bojom. Prema lemi, postoji uvijek bar jedan monohromatski trougao. Ako je trougao plave boje, onda je tvrdnja dokazana. Neka je monohromatski trougao crvene boje. Neka su ivice tog trougla $a+b$, $b+c$, $c+a$. Posmatrajmo sada izraz:

$$(a+b)+(b+c)-(c+a)=2b.$$

Odavde slijedi da je b racionalan broj, što je kontradikcija sa pretpostavkom zadatka.

Dakle, $a+b, b+c, c+a$ su iracionalni brojevi.

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

SARAJEVO, 16.04.2011.

I RAZRED - REZULTATI

Broj	Rank	IME I PREZIME	GRAD	ŠKOLA	BODOVI PO ZADACIMA				UKUPNO
					I	II	III	IV	28
1	1	Rijad Muminović	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	7	7	0	3	**17**
2	2	Abdulah Jašarević	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	7	7	0	2	**16**
3	3	Anes Valentić	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	0	7	0	7	**14**
4	3	Dina Sarajlić	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	7	7	0	0	**14**
5	3	Haris Brkić	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	0	7	7	0	**14**
6	3	Jasmina Hakmi	Bihać	*Una-Sana Koledž*	7	7	0	0	**14**
7	7	Amila Jakupović	Sarajevo	*Prva Bošnjačka Gimnazija*	6	7	0	0	**13**
8	7	Jasmin Hadžajlić	Mostar	*Srednja Elektrotehnička*	6	7	0	0	**13**
9	9	Lamija Kujan	Sarajevo	*Međunarodna Srednja Škola*	0	7	0	3	**10**
10	10	Lejla Čusto	Mostar	*Opća Gimnazija*	2	7	0	0	**9**
11	10	Mario Šario	Tuzla	*Opća Gimnazija "Sveti Franjo"*	0	7	0	2	**9**
12	12	Ajna Ibrahimkadić	Usora	*MŠŠ Stjepana Radića*	0	7	0	1	**8**
13	12	Samir Halilčević	Živinice	*Gimnazija Živinice*	0	7	0	1	**8**
14	14	Admir Omeragić	Sarajevo	*Prva Gimnazija*	0	7	0	0	**7**
15	14	Anela Babović	Tuzla	*Gimnazija "Ismet Mujezinović"*	0	7	0	0	**7**
16	14	Dženita Falić	Bihać	*Una-Sana Koledž*	0	7	0	0	**7**
17	14	Ensar Hasanbegović	Sarajevo	*Treća Gimnazija*	7	0	0	0	**7**
18	14	Irma Hadžić	Tuzla	*Opća Gimnazija "Sveti Franjo"*	0	7	0	0	**7**
19	19	Amna Kopić	Olovo	*MSŠ "Musa Ćazim Ćatić"*	2	1	0	1	**4**
20	20	Adi Kurbegović	Bihać	*Una-Sana Koledž*	2	0	0	1	**3**
21	20	Amra Muratović	Živinice	*Gimnazija Živinice*	2	1	0	0	**3**
22	22	Dalila Isanović	Sarajevo	*Međunarodna Srednja Škola*	2	0	0	0	**2**
23	22	Dino Mehmedagić	Zenica	*Prva Gimnazija*	0	2	0	0	**2**
24	22	Džemo Mustajbašić	Gračanica	*Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić"*	0	2	0	0	**2**
25	22	Luka Aabramušić	Zenica	*KŠC "Sveti Pavao"*	0	1	0	1	**2**
26	22	Medina Kozarac	Ključ	*MSŠ "Ključ"*	2	0	0	0	**2**
27	27	Azra Hamedović	Ključ	*MSŠ "Ključ"*	0	1	0	0	**1**
28	27	Lejla Džananović	Gračanica	*Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić"*	1	0	0	0	**1**
29	27	Milan Žuža	Hadžići	*Srednjoškolski Centar Hadžići*	0	0	0	1	**1**
30	27	Rasim Kaleta	Sarajevo	*Međunarodna Srednja Škola*	0	1	0	0	**1**
31	27	Selina Jukić	Tuzla	*Gimnazija "Meša Selimović"*	0	1	0	0	**1**
32	28	Lejla Brekalo	Mostar	*rednja Mašinsko-Saobraćajna škol*	0	0	0	0	**0**
33	28	Maida Šišić	Tešanj	*Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić"*	0	0	0	0	**0**
34	28	Mariam Elamin	Tuzla	*Međunarodna Srednja Škola*	0	0	0	0	**0**
35	28	Samir Duraković	Mostar	*Srednja Elektrotehnička*	0	0	0	0	**0**
36	28	Samra Čataković	Cazin	*Gimnazija Cazin*	0	0	0	0	**0**

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

SARAJEVO, 16.04.2011.

II RAZRED - REZULTATI

Broj	Rank	IME I PREZIME	GRAD	ŠKOLA	BODOVI PO ZADACIMA				UKUPNO
					I	II	III	IV	28
1	1	Hadžem Hadžić	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	7	6	0	6	19
2	2	Selver Sadiković	Bihać	*Una-Sana Koledž*	7	3	0	7	17
3	3	Adnan Ibrić	Lukavac	*Gimnazija Lukavac*	7	7	1	0	15
4	4	Dino Dizdarević	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	7	0	0	4	11
5	5	Amir Gvozdan	Srebrenik	*Mješovita SŠ*	7	2	1	0	10
6	6	Džurejdž Crnjkić	Bihać	*Una-Sana Koledž*	7	2	0	0	9
7	6	Admira Husić	Zavidovići	*Gimnazija"Rizah Odževkić*	7	1	1	0	9
8	6	Amra Fočo	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	7	2	0	0	9
9	6	Belma Skompljković	Tuzla	*Gimnazija "Meša Selimović"*	7	2	0	0	9
10	10	Ema Hujić	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	7	0	1	0	8
11	10	Merima Omić	Gradačac	*Gimnazija "Mustafa Novalić"*	7	1	0	0	8
12	10	Medina Kulić	Gračanica	*Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić"*	7	1	0	0	8
13	10	Amar Bapić	Bosansk Krupa	*Opća Gimnazija*	7	1	0	0	8
14	10	Amar Muhović	Sarajevo	*Prva Bošnjačka Gimnazija*	7	1	0	0	8
15	15	Medina Čolić	Bihać	*Una-Sana Koledž*	7	0	0	0	7
16	15	Miran Bradarić	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	7	0	0	0	7
17	15	Adis Hasanbašić	Sarajevo	*Treća Gimnazija*	7	0	0	0	7
18	15	Lejla Nukić	Visoko	*Gimnazija Visoko*	7	0	0	0	7
19	15	Jasmin Mehulić	Cazin	*Gimnazija Cazin*	7	0	0	0	7
20	15	Sulejman Delić	Gračanica	*Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić"*	7	0	0	0	7
21	15	Kenan Kurdić	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	7	0	0	0	7
22	15	Adnan Kličić	Bihać	*Una-Sana Koledž*	7	0	0	0	7
23	23	Mirza Čeliković	Kakanj	*Gimnazija "Muhsin Rizvić"*	5	0	0	0	5
24	24	Ivan Bartulović	Visoko	*Franjevačka Klasična Gimnazija*	3	1	0	0	4
25	25	Faris Trešnjo	Mostar	*Druga Gimnazija*	3	0	0	0	3
26	25	Merima Čišija	Velika Kladuša	*Gimnazija V.K.*	3	0	0	0	3
27	25	Arif Šakanović	Kakanj	*Gimnazija "Muhsin Rizvić"*	3	0	0	0	3
28	28	Anisa Šahović	Sarajevo	*Građevinsko-Gegradska Škola*	1	1	0	0	2
29	28	Berina Slipčević	Visoko	*Gimnazija Visoko*	2	0	0	0	2
30	28	Sabrija Hasančević	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	1	0	1	0	2
31	31	Almir Demirović	Mostar	*Srednja Elektrotehnička Škola*	1	0	0	0	1
32	32	Jasmin Djedović	Tuzla	*Elektrotehnička Škola*	0	0	0	0	0

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE *SARAJEVO, 16.04.2011.* III RAZRED - REZULTATI									
Broj	Rank	IME I PREZIME	GRAD	ŠKOLA	BODOVI PO ZADACIMA				UKUPNO
					I	II	III	IV	28
1	1	Harun Hindija	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	7	7	7	5	26
2	2	Sead Delalić	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	7	6	2	0	15
3	3	Esma Mujkić	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	1	2	7	0	10
4	3	Robert Matičević	Tuzla	*KŠC Sveti Franjo*	3	6	1	0	10
5	4	Muhamed Ćilašević	Tuzla	*Gimnazija Meša Selimović*	7	1	0	0	8
6	5	Edin Husić	Tuzla	*Gimnazija Meša Selimović*	0	6	0	0	6
7	5	Senad Čustović	Sarajevo	*Treća Gimnazija*	5	0	1	0	6
8	5	Ishak Numanagić	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	6	0	0	0	6
9	9	Šehrizada Šahinović	Bihać	*Una Sana Koledž*	5	0	0	0	5
10	9	Hamza Merzić	Sarajevo	*Prva Bošnjačka Gimnazija*	5	0	0	0	5
11	11	Amar Muhamedagić	Visoko	*MSŠ "Hazim Šabanović"*	3	1	0	0	4
12	12	Auhan Mulahalibić	Gradačac	*Gimnazija "Mustafa Novalić"*	1	2	0	0	3
13	12	Melisa Kobasica	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	1	2	0	0	3
14	14	Irfan Bešić	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	1	1	0	0	2
15	14	Amela Veladžić	Bihać	*Una Sana Koledž*	1	1	0	0	2
16	16	Daniel Ferizović	Bos. Petrovac	*MSŠ "Bosanski Petrovac"*	1	0	0	0	1
17	16	Mirhat Babić	Visoko	*MSŠ "Hazim Šabanović"*	0	0	1	0	1
18	16	Osman Kavazović	Gradačac	*Gimnazija "Mustafa Novalić"*	0	1	0	0	1
19	16	Haris Smajlović	Tuzla	*Gimnazija "Meša Selimović"*	1	0	0	0	1
20	16	Dino Macić	Mostar	*Srednja Elektrotehnička Škola*	0	0	1	0	1
21	16	Arnela Šutić	Mostar	*Druga Gimnazija*	1	0	0	0	1
22	16	Faruk Mustafić	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	1	0	0	0	1
23	23	Almedin Norakić	Lukavac	*MS Elektromašinska Škola*	0	0	0	0	0
24	23	Mustafa Kadić	Kakanj	*Gimnazija "Muhsin Rizvić"*	0	0	0	0	0
25	23	Nemanja Šlivić	Visoko	*MSŠ "Hazim Šabanović"*	0	0	0	0	0
26	23	Azra Grozdanić	Bihać	*Gimnazija "Bihać"*	0	0	0	0	0
27	23	Dinko Čejvanović	Bihać	*Gimnazija "Bihać"*	0	0	0	0	0
28	23	Hidajeta Ljevaković	Tešanj	*Gimnazija "Musa Ć. Ćatić"*	0	0	0	0	0
29	23	Dijana Šibenik	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	NEPOZNATO				
30	23	Muhamed Musić	Olovo	*MSŠ "Musa Ćazim Ćatić"*	NEPOZNATO				

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE *SARAJEVO, 16.04.2011.* IV RAZRED - REZULTATI									
Broj	Rank	IME I PREZIME	GRAD	ŠKOLA I MJESTO	BODOVI PO ZADACIMA				UKUPNO
					I	II	III	IV	28
1	1	Mina Ferizbegović	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	7	2	5	0	14
2	2	Rijad Skrobo	Sarajevo	*Sarajevo Koledž*	7	1	3	0	11
3	3	Zlatan Tucaković	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	7	1	2	0	10
4	4	Ajla Rizvan	Visoko	*Gimnazija Visoko*	0	1	2	0	3
5	5	Armin Nurkanović	Tuzla	*Gimnazija "Meša Selimović"*	1	0	1	0	2
6	5	Adha Hrusto	Kakanj	*Gimnazija "Muhsin Rizvić"*	1	1	0	0	2
7	5	Emina Sikira	Kakanj	*Gimnazija "Muhsin Rizvić"*	0	2	0	0	2
8	5	Almina Merdić	Visoko	*Gimnazija "Visoko"*	2	0	0	0	2
9	5	Alen Mujkanović	Bihać	*Una Sana Koledž*	0	2	0	0	2
10	10	Amina Šljivo	Sarajevo	*Prva Gimnazija*	0	1	0	0	1
11	10	Harun Veladžić	Bihać	*Una Sana Koledž*	0	1	0	0	1
12	10	Armin Korman	Tuzla	*Gimnazija "Meša Selimović"*	0	0	1	0	1
13	10	Džan Ahmed Jasenkov	Sarajevo	*Prva Bošnjačka Gimnazija*	0	1	0	0	1
14	10	Dino Džanić	Srebrenik	*MSŠ "Srebrenik"*	0	0	1	0	1
15	10	Smajil Halilović	Tuzla	*Gimnazija "Meša Selimović"*	1	0	0	0	1
16	10	Nermin Redžić	Tešanj	*Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić"*	1	0	0	0	1
17	10	Lamija Vuković	Sarajevo	*Druga Gimnazija*	1	0	0	0	1
18	10	Damir Ferizović	Bos. Petrovac	*MSŠ "Bosanski Petrovac"*	0	0	1	0	1
19	19	Denis Čaušević	Zenica	*KŠC "Sveti Pavao"*	0	0	0	0	0
20	19	Elma Alić	Zenica	*Prva Gimnazija*	0	0	0	0	0
21	19	Faris Čakarić	Sarajevo	*Prva Bošnjačka Gimnazija*	0	0	0	0	0
22	19	Dalmir Hasić	Bihać	*Una Sana Koledž*	0	0	0	0	0
23	19	Emir Hodžić	Gračanica	*Gimnazija "Dr. Mustafa Kumurić"*	0	0	0	0	0
24	19	Sanda Mujakić	Cazin	*Gimnazija "Cazin"*	0	0	0	0	0
25	19	????	Mostar	*Srednja Elektrotehnička Škola*	0	0	0	0	0