

ČASOPIS UDRUŽENJA MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA

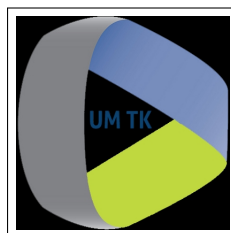


EVOLVENTA



Vol. 2, No. 1, TUZLA 2019.

JAMTK
Journal of the Association of mathematicians of TK
Časopis Udruženja matematičara TK



EVOLVENTA

Vol. 2, No. 1 , 2019

Elektronska publikacija

EVOLVENTA

Journal of the Association of mathematicians of Tuzla Canton
(JAMTK)

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona

Časopis Udruženja matematičara Tuzlanskog kantona, objavljuje pisane materijale (članke) iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i iz drugih naučnih disciplina ako su povezane sa profilom časopisa. Izlazi u dva broja godišnje i dostupan je u elektronskom obliku na www.umtk.info. Članovi UM TK imaju besplatan pristup elektronskom časopisu za tu godinu. Časopis je finansiran isključivo sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK.

Osnivač časopisa: Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona

Glavni urednik:

Dr. sc. Mehmed Nurkanović, PMF Tuzla, Odsjek matematika,
mehmed.nurkanovic@untz.ba

Tehnički urednik:

Dr. sc. Nermin Okičić, PMF Tuzla, Odsjek matematika,
nermin.okicic@untz.ba

Urednički odbor:

Dr. sc. Hasan Jamak, PMF Sarajevo, Odsjek matematika
Dr. sc. Zehra Nurkanović, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. sc. Ramiz Vugdalić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. sc. Enes Duvnjaković, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. sc. Nermin Okičić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. sc. Vedad Pašić, PMF Tuzla, Odsjek matematika
Dr. sc. Hariz Agić, Pedagoški zavod Tuzla
Nevzeta Karać, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla
Marko Pavlović, KŠC "Sveti Franjo" Tuzla
Hasan Smajić, OŠ "Malešići" Malešići-Gračanica

Adresa:

Univerzitetska 4, 75000 Tuzla, Bosna i Hercegovina
Telefon: ++387 61 178 698
Fax: ++387 35 320 861

Žiro račun udruženja:

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona
(za časopis)
3383002261804115
(UniCredit Bank)

Sadržaj

1	ČLANCI	1
	Alija Muminagić	
	<i>Jedan zadatak s više načina rješavanja</i>	2
	Dragoljub Milošević	
	<i>O pravilnom osmouglu</i>	11
	Šefket Arslanagić	
	<i>O značaju diskriminante kvadratne jednačine pri rješavanju nelinearnih</i>	
	<i>Diofantovih jednačina</i>	17
	Mehmed Nurkanović, Zehra Nurkanović	
	<i>Iracionalne jednadžbe i nejednadžbe</i>	21
	Dragoljub Milošević	
	<i>Dirihleov princip i njegove primjene</i>	34
2	KUTAK ZA ZADATKE	41
	Zabavna matematika	42
	Nagradni zadatak: Problem kretanja.	43
	Konkursni zadaci.	44
	Rješenja konkursnih zadataka 11–20	46

Uvodna riječ

Udruženje matematičara Tuzlanskog kantona (UM TK) u 2018. godini je pokrenulo stručno-metodički časopis *EVOLVENTA (JAMTK)*. Ime časopisa potječe od imena poznate krive u matematici (kriva koja tangente neke date krive siječe pod pravim uglom naziva se evolventom te krive, vidjeti web stranicu <https://en.wikipedia.org/wiki/Involute>).

Časopis *Evolventa* je namijenjen učenicima i nastavnicima osnovnih i srednjih škola, te studentima prvog i drugog ciklusa studija. Sadrži stručne radove iz matematike, informatike i metodike nastave matematike i informatike, ali i teme iz drugih područja ako su na neki na čin povezane s osnovnim profilom časopisa. Također sadrži stalnu rubriku *Kutak za zadatke*, namijenjenu učenicima osnovnih i srednjih škola. U okviru ove rubrike stalno su prisutni sljedeći sadržaji: konkursni zadaci, rješenja konkursnih zadataka iz prethodnog broja, zabavna matematika, nagradni zadatak, a povremeno se mogu pojavljivati i drugi sadržaji poput zadataka sa zajedničkih maturalnih ispita, odnosno zadataka s kvalifikacionih ispita na fakultetima Univerziteta u Tuzli i sl. Najbolja pristigla učenička rješenja konkursnih zadataka se objavljuju u narednom broju časopisa, kao i spisak svih učenika, rješavatelja zadataka, s brojevima uspješno riješenih zadataka. Za prvo pristiglo, potpuno tačno, rješenje nagradnog zadatka predviđena je adekvatna nagrada.

Časopis *Evolventa* isključivo je financiran sredstvima donatora, sponzora i sredstvima Udruženja matematičara TK i dostupan je jedino u online formi na web stranici UM TK: www.umtk.info. U 2018. godini časopis će biti dostupan bez ograničenja, a od 2019. godine časopis će biti besplatno dostupan čitateljima koji su članovi UM TK (o iznosu članarine detaljnije se može vidjeti na web stranici UM TK).

Pozivamo čitatelje, a posebno nastavnike, učenike, studente i članove Udruženja matematičara TK da šalju svoje radove za objavljivanje u časopisu *Evolventa*. Pri tome se treba strogo držati uputa sadržanih na web stranici UM TK.

Urednički odbor časopisa i Predsjedništvo UM TK se posebno zahvaljuju kolegama nastavnicima i asistentima s Odsjeka matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli za veliku podršku u objavljivanju časopisa *Evolventa*.

U Tuzli, 26. decembra 2019. godine

Uredništvo

1

ČLANCI

Jedan zadatak s više načina rješavanja

Alija Muminagić^a

^aKraljevina Danska

Sažetak: U ovom radu na šest različitih načina rješavamo jedan poznati zadatak iz geometrije koji je u matematičkoj literaturi poznat kao Bobillierova formula. Rješavajući zadatak na više načina, cilj nam je ukazati na analize i primjene veće količine znanja koja su potrebna za njegovo rješavanje a sve sa ciljem produblivanja i proširivanja matematičkih znanja.

1. Uvod

Počnemo citatom iz [6]: "Zašto razmatrati više načina rješavanja? Zar nije dovoljan samo jedan budući da on vodi do onoga što se traži, a to je rješenje zadatka? Naravno da je dovoljan jedan način rješavanja ako je cilj samo rješenje zadatka. No, ako se želi postići više, onda nije dovoljan. Šta je to više? Za nalaženje rješenja zadatka potrebno je određeno znanje koje se sastoji od teorijskih činjenica koje su u najužoj vezi sa zadatkom. Za jedan način rješavanja potrebne su jedne činjenice, za drugi način neke druge činjenice, za treći treće. Zaključujemo da će za rješavanje na više načina trebati više teorijskih činjenica i metoda nego za rješavanje na samo jedan način. Time se za samo jedan zadatak aktivira, analizira i primijenjuje veća količina stečenog znanja. Osim toga, znanja se produbljuju i proširuju novim znanjima, a najvažnije je da zadaci sa više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes za matematiku."

Da je to upravo tako uvjerićemo se rješavajući ovaj dobro poznati zadatak.

Zadatak 1.1. *Zbir poluprečnika pripisanih kružnica nekog trougla jednak je zbiru četverostrukog poluprečnika opisane kružnice i poluprečnika upisane kružnice tog trougla, to jest*

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \quad (1)$$

gdje su r_a, r_b, r_c poluprečnici trougla pripisanih kružnica uz odgovarajuće stranice i R i r poluprečnici opisane i upisane kružnice tog trougla.

Formula (1) je u matematičkoj literaturi poznata kao Bobillierova formula.

2. Prvi način

Na ovaj način rješavaju učenici 8. i 9. razreda osnovne škole. Prvo moraju riješiti ovaj zadatak.

Zadatak 2.1. *Dokažite da u svakom trouglu vrijedi:*

$$(a) \quad r = \frac{P}{s},$$

Ciljna skupina: srednja škola

Rad preuzet: februar 2019.

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

$$(b) \ r_a = \frac{P}{s-a}, \ r_b = \frac{P}{s-b}, \ r_c = \frac{P}{s-c},$$

gdje je r poluprečnik upisane kružnice, r_a, r_b, r_c poluprečnici pripisanih kružnica, $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla i P njegova površina.

Rješenje: (a) Sa Slike 1. vidimo da je

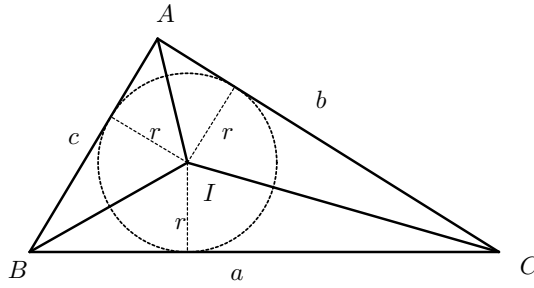
$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle IBC} + P_{\triangle ICA} + P_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s,$$

$$\text{tj. } r = \frac{P}{s}.$$

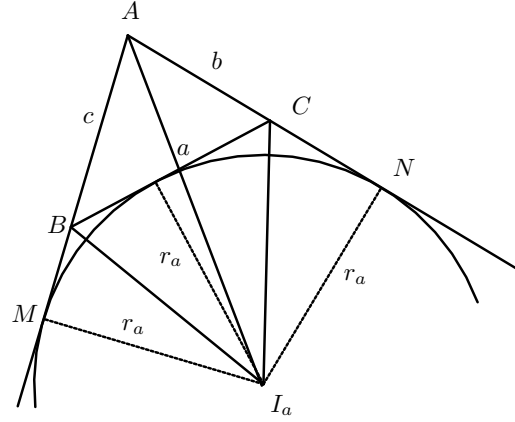
(b) Sa Slike 2. vidimo da je

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle BI_aA} + P_{\triangle CI_aA} - P_{\triangle BI_aC} = \frac{1}{2}c \cdot r_a + \frac{1}{2}b \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a = r_a \cdot \frac{c+b-a}{2} = r_a(s-a)$$

jer je $s-a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{c+b-a}{2}$, pa je $r_a = \frac{P}{s-a}$. Analogno je $r_b = \frac{P}{s-b}$ i $r_c = \frac{P}{s-c}$. \square



Slika 1.



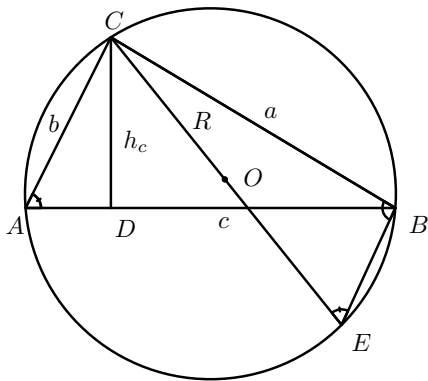
Slika 2.

Da dokažemo da je $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ili $r_a + r_b + r_c - r = 4R$ potrebno je još znati Heronovu formulu za izračunavanje površine trougla $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Tako je

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= \frac{P}{s-a} + \frac{P}{s-b} + \frac{P}{s-c} - \frac{P}{s} = P \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} \right) + P \left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} \right) \\ &= P \frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)} + P \frac{s-(s-c)}{s(s-c)} = P \left(\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)} + \frac{s-s+c}{s(s-c)} \right) \\ &= P \left(\frac{c}{(s-a)(s-b)} + \frac{c}{s(s-c)} \right) = P \cdot c \left(\frac{s(s-c) + (s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} \right) \\ &= P \cdot c \frac{s^2 - sc + s^2 - sb - sa + ab}{P^2} = c \frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{P} \\ &= c \frac{2s^2 - 2s^2 + ab}{P} = \frac{abc}{P} = 4R. \end{aligned}$$

Napomena: srednjoškolci lako dokazuju na ovaj način

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = (\text{zbog } \sin \gamma = \frac{c}{2R} \text{ na osnovu sinusne teoreme}) = \frac{1}{2} \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$



Slika 3.

Preostaje nam da dokažemo da je $\frac{abc}{P} = 4R$.

Neka je O središte opisane kružnice trouglu ABC , i neka je $h_c = CD$ visina iz C na $AB = c$ (vidi Sliku 3.). Neka je E presječna tačka pravca CO i kružnice. Tako je $CE = 2R$. Sada je $\angle BAC = \angle BEC$ (kao periferijski uglovi nad \widehat{BC}), a $\angle CBE = 90^\circ$ (kao uglovi nad prečnikom). Zato je $\triangle ACD \sim \triangle ECB$ i iz te sličnosti slijedi $\frac{b}{h_c} = \frac{2R}{a} \Leftrightarrow h_c = \frac{ab}{2R}$, a iz $P = \frac{1}{2}h_c \cdot c$ je $h_c = \frac{2P}{c}$, pa je $\frac{ab}{2R} = \frac{2P}{c} \Leftrightarrow \frac{abc}{P} = 4R$.

3. Drugi način

Zadatak 3.1. Dokazati da u trouglu ABC vrijedi:

$$(a) \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c},$$

$$(b) \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}.$$

Rješenje:(a) Imamo

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{s}{P} - \frac{s-c}{P} = \frac{c}{P} = \frac{c}{\frac{1}{2}ch_c} = \frac{2}{h_c}. \quad (2)$$

$$\text{Iz } \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c} \text{ dobijamo } \frac{r_c - r}{rr_c} = \frac{2}{h_c} \Leftrightarrow r_c - r = \frac{2}{h_c}rr_c.$$

(b) Imamo

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{s-a}{P} + \frac{s-b}{P} = \frac{2s-a-b}{P} = \frac{a+b+c-a-b}{P} = \frac{c}{P} = \frac{2}{h_c} \quad (3)$$

$$\text{a iz } \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c} \text{ dobijamo } \frac{r_a+r_b}{r_ar_b} = \frac{2}{h_c} \Leftrightarrow r_a + r_b = \frac{2}{h_c}r_ar_b. \quad \square$$

Dokazujemo sada da je $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ili $r_a + r_b + r_c - r = 4R$. Koristeći (2) i (3), dobijamo

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= (r_a + r_b) + (r_c - r) = \frac{2}{h_c}(r_ar_b + rr_c) = \frac{2}{h_c} \left(\frac{P}{s-a} \cdot \frac{P}{s-b} + \frac{P}{s} \cdot \frac{P}{s-c} \right) \\ &= \frac{2P^2}{h_c} \frac{s^2 - sc + s^2 - sb - sa + ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2P^2}{h_c} \frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{P^2} \\ &= \frac{2}{h_c}ab = \frac{2c}{2P}ab = \frac{c}{P} \frac{abc}{c} = \frac{abc}{P} = 4R. \end{aligned}$$

Predlažemo da srednjoškolci daju planimetrijski dokaz za $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_c}$ i $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}$. Oni učenici koji dobro “gledaju” iz prvog načina dokazivanja vide da je

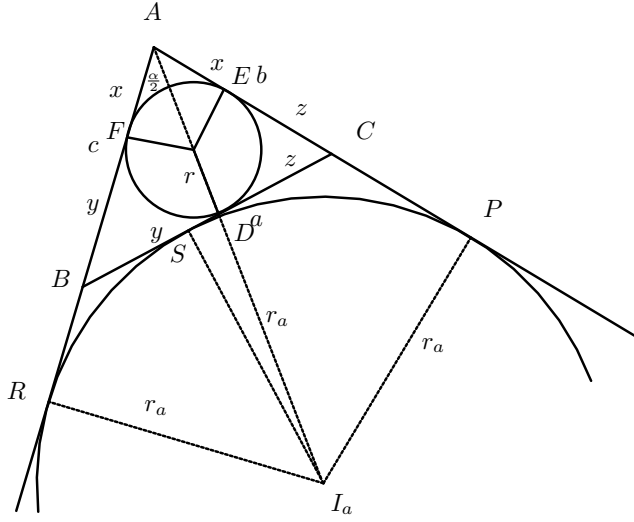
$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{P}{s} \cdot \frac{P}{s-a} \cdot \frac{P}{s-b} \cdot \frac{P}{s-c} = \frac{P^4}{P^2} = P^2 \Leftrightarrow P = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

a iz drugog načina

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

4. Treći način

Ovo će biti trigonometrijski način rješavanja zadatka.



Slika 4.

Posmatrajmo Sliku 4. Dokažimo da vrijedi:

$$(a) \quad x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c,$$

$$(b) \quad AR = AP = s.$$

(a) Iz jednakosti tangentskih duži $AF = AE = x$, $BF = BD = y$ i $CD = CE = z$ dobijamo $AB = c = AF + BF = x + y$, $BC = a = BD + CD = y + z$ i $CA = b = CE + AE = z + x$. Dakle, $a = y + z$, $b = x + z$ i $c = x + y$. Obim trougla ABC je $2s = 2x + 2y + 2z \Leftrightarrow s = x + y + z$ pa iz posljednje jednakosti slijedi $x = s - (y + z) = s - a$, $y = s - (x + z) = s - b$ i $z = s - c$.

(b) Koristeći jednakost tangentskih duži (vidi Sliku 4.) dobijamo

$$\begin{aligned} AP = AR &= \frac{1}{2}(AP + AR) = \frac{1}{2}(AC + CP + AB + RB) = \frac{1}{2}(AC + CS + AB + BS) \\ &= \frac{1}{2}(AB + CS + BS + AC) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(a + b + c) = s. \end{aligned}$$

Na pravouglim trouglovima AIF i AI_aR je

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{IF}{AF} = \frac{r}{x} = \frac{r}{s-a} \Leftrightarrow r = (s-a) \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (4)$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{I_aR}{AR} = \frac{r_a}{s} \Leftrightarrow r_a = s \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (5)$$

pa na osnovu (4) i (5) vrijedi

$$r_a - r = (s - (s-a)) \tan \frac{\alpha}{2} = a \cdot \tan \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

S druge strane imamo da je

$$\begin{aligned} r_b + r_c &= \frac{P}{s-b} + \frac{P}{s-c} = P \frac{s-c+s-b}{(s-b)(s-c)} = P \frac{2s-c-b}{(s-b)(s-c)} \\ &= P \frac{a+b+c-b-c}{(s-b)(s-c)} = P \frac{a}{(s-b)(s-c)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Iz (4) je

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a} = \frac{\frac{P}{s}}{s-a} = \frac{P}{s(s-a)} \Leftrightarrow P = s(s-a) \tan \frac{\alpha}{2} \quad (8)$$

što uvršteno u (7) daje

$$r_b + r_c = s(s-a) \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a}{(s-b)(s-c)} = a \frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)} \tan \frac{\alpha}{2}. \quad (9)$$

Zbog $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$ je

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{(s-a)^2} = \frac{\frac{P^2}{s^2}}{(s-a)^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2(s-a)^2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

pa jednakost (9) možemo pisati u obliku

$$r_b + r_c = a \cdot \frac{1}{\tan^2 \frac{\alpha}{2}} \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\tan \frac{\alpha}{2}}. \quad (10)$$

Sabiranjem jednкости (6) i (10) dobijamo

$$\begin{aligned} r_a - r + r_b + r_c &= a \cdot \tan \frac{\alpha}{2} + \frac{a}{\tan \frac{\alpha}{2}} = a \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \left(\text{zbog } \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} \right) \\ &= a \cdot \frac{2}{\sin \alpha} = 2 \cdot \frac{a}{\sin \alpha} \left(\text{zbog } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R \text{ na osnovu sinusne teoreme} \right) \\ &= 2 \cdot 2R = 4R \end{aligned}$$

tojest $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

5. Četvrti način

Ovo će također biti trigonometrijski način rješavanja zadatka. Prethodno ćemo dokazati identitete koje zadovoljavaju uglovi trougla.

Teorem 5.1. *Vrijedi*

$$(a) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R},$$

$$(b) -\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_a}{R} - 1,$$

$$(c) \cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_b}{R} - 1,$$

$$(d) \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = \frac{r_c}{R} - 1,$$

Dokaz:

(a) To je dobro poznati identitet.

(b) Identitet $-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_a}{R} - 1$ je ekvivalentan sa $2abc(-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = 2abc \frac{r_a}{R} - 2abc$

pa zbog $R = \frac{abc}{4T}$ dobijamo $2abc(-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + 2abc = 2abc \frac{4Tr_a}{abc} = 8Tr_a$. Označimo lijevu stranu posljednje jednakosti sa L . Iz kosinusne teoreme slijedi

$$2bc \cos \alpha = -a^2 + b^2 + c^2,$$

$$2ac \cos \beta = -b^2 + a^2 + c^2,$$

$$2ab \cos \gamma = -c^2 + a^2 + b^2,$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
 L &= -a(-a^2 + b^2 + c^2) + b(a^2 - b^2 + c^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) + 2abc \\
 &= a^3 + a^2(b + c) - a(b^2 + c^2 - 2bc) - b^3 + b^2c + bc^2 - c^3 \\
 &= a^3 + a^2(b + c) - a(b - c)^2 - (b^3 + c^3) + bc(b + c) \\
 &= a^3 + a^2(b + c) - a(b - c)^2 - (b + c)(b^2 - bc + c^2 - bc) \\
 &= a^3 + a^2(b + c) - a(b - c)^2 - (b + c)(b - c)^2 \\
 &= a^2(a + b + c) - (b - c)^2(a + b + c) = (a + b + c)(a^2 - (b - c)^2) \\
 &= (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = 2s(2s - 2b)(2s - 2c) = 8s(s - b)(s - c) \\
 &= \frac{8s(s - a)(s - b)(s - c)}{s - a} = \frac{8T^2}{s - a} = 8T \frac{T}{s - a} = 8Tr_a
 \end{aligned}$$

što je desna strana jednakosti.

(c) Slično kao pod (b).

(d) Slično kao pod (b).

□

Sada slijedi rješenje našeg zadatka. Sabiranjem identiteta $-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_a}{R} - 1$, $\cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_b}{R} - 1$ i $\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = \frac{r_c}{R} - 1$, dobijamo

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \frac{1}{R}(r_a + r_b + r_c) - 3 \stackrel{(a)}{=} 1 + \frac{r}{R} = \frac{1}{R}(r_a + r_b + r_c) - 3 \\
 &\Leftrightarrow R + r = r_a + r_b + r_c - 3R \Leftrightarrow r_a + r_b + r_c = 4R + r.
 \end{aligned}$$

6. Peti način

Dokazaćemo najprije teoremu o kružnici devet tačaka.

Teorem 6.1. *Podnožja visina D, E, F , središta stranica K, L, M i središta duži HA, HB, HC gdje je H ortocentar $\triangle ABC$, leže na jednoj kružnici k_9 koju nazivamo kružnicom devet tačaka.*

Dokaz: Teorema se može dokazati na razne načine a mi dajemo ne tako čest dokaz.

Neka je O središte opisane kružnice $\triangle ABC$ i neka je $\vec{OA} = \vec{k}$, $\vec{OB} = \vec{l}$ i $\vec{OC} = \vec{m}$, (vidi Sliku 5.). Tada je $|\vec{k}| = |\vec{l}| = |\vec{m}| = R$, gdje je R poluprečnik opisane kružnice $\triangle ABC$.

Posmatrajmo vektor \vec{h} definisan kao $\vec{h} = \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{k} + \vec{l} + \vec{m}$. Imamo da je $\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = \vec{l} + \vec{m}$ i $\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{l} - \vec{m}$ pa je skalarni proizvod tih vektora jednak

$$\vec{AH} \cdot \vec{CB} = (\vec{l} + \vec{m}) \cdot (\vec{l} - \vec{m}) = |\vec{l}|^2 - |\vec{m}|^2 = 0$$

što znači da je $\vec{AH} \perp \vec{CB}$. Analogno pokazujemo da je $\vec{BH} \perp \vec{AC}$ i $\vec{CH} \perp \vec{AB}$, što znači da je tačka H ortocentar $\triangle ABC$.

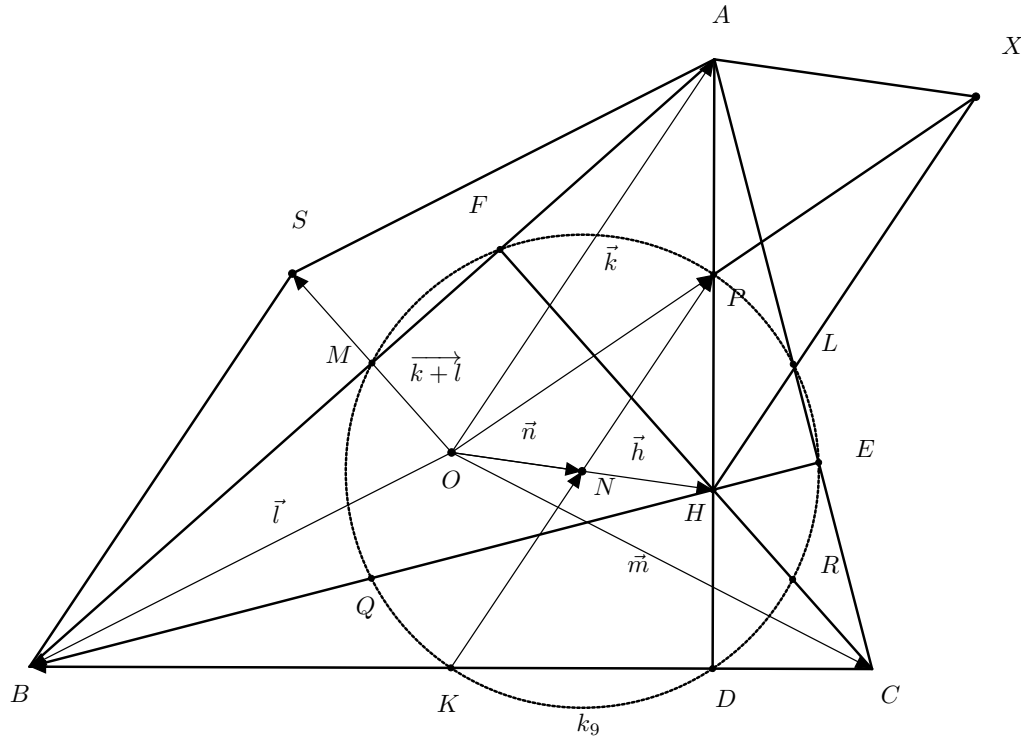
Definišimo sada vektor \vec{u} kao

$$\vec{u} = \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{l} + \vec{m})$$

tj. tačka N je središte duži OH . U trapezu $OKDH$ je $NK = ND$, a kako je tačka P središte duži AH (iz paralelograma $AXHO$), imamo da je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{l} + \vec{m} + \vec{k}) = \frac{1}{2}(2\vec{k} + \vec{l} + \vec{m}), \\ \overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(2\vec{k} + \vec{l} + \vec{m}) - \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{l} + \vec{m}) = \frac{1}{2}\vec{k}, \\ \overrightarrow{KN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{l} + \vec{m}) - \frac{1}{2}(\vec{l} + \vec{m}) = \frac{1}{2}\vec{k}\end{aligned}$$

jer je $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\vec{l} + \vec{m})$. Dakle, $NK = NP$ i zbog $NK = ND$ je $NK = ND = NP$. Slično pokazujemo da je $NE = NL = NQ$ i $NF = NM = NR$ a lako vidimo i da je $NK = NL = NM$, što znači da svih devet tačaka su na istom rastohjanju od tačke N , pa je N središte kružnice k_9 . \square



Slika 5.

Neka je u $\triangle ABC$, tačka I središte upisane kružnice, r i R poluprečnici upisane i opisane kružnice, te r_a, r_b, r_c poluprečnici pripisanih kružnica uz odgovarajuću stranicu tog trougla i neka su tačke D, E i F središta pripisanih kružnica, vidi Sliku 5.

Simetrale unutrašnjih uglova AD, BE i CF u $\triangle ABC$ su normale na pravce FAE, FBD i DCE koji su simetrale spoljašnjih uglova kod vrhova A, B i C . Dakle, tačke A, B i C su podnožja visina u $\triangle DEF$, pa je kružnica koja prolazi tim tačkama kružnica 9 tačaka u $\triangle DEF$ koja je istovremeno opisana kružnica $\triangle ABC$. Osim toga, tačka I je istovremeno ortocentar H u $\triangle DEF$.

Na osnovu Teoreme 6.1 vrijedi da je tačka R središte duži IF a i središte luka \widehat{AB} , jer je CF simetrala ugla kod vrha C u $\triangle ABC$. Tako je $RA = RB$ te $OA = OB$ pa slijedi da je prečnik RL normalan na tetivu AB , zbog čega je tačka T središte duži AB . Osim toga $RL \perp UV$, gdje su U i V dodirne tačke upisane kružnice (I, r) u $\triangle ABC$ i pripisane kružnice (F, r_c) u $\triangle ABC$.

Teorem 7.1. *Neka simetrale uglova kod vrtova A , B i C u $\triangle ABC$ sijeku opisanu kružnicu tom trouglu u tačkama P , Q i R . Ako je I središte tom trouglu upisane kružnice, onda je $PB = PC = PI$, $QC = QA = QI$ i $RA = RB = RI$.*

Dokaz: Poznato je da jednakim periferijskim uglovima odgovaraju jednaki lukovi a time i jednake tetive pa je $PB = PC$, vidi Sliku 6, pa $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAC = \frac{\alpha}{2}$. Da bi dokazali da je $PI = PB$ dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle PIB = \varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, jer je $\sphericalangle PIB$ spoljašnji ugao u $\triangle ABI$. U $\triangle BIP$ je $\sphericalangle PIB + \sphericalangle IBP + \sphericalangle BPI = 180^\circ$, pa zbog $\sphericalangle PIB = \varphi$, $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle PAB = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle IBC = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle IBP = \sphericalangle IBC + \sphericalangle PBC = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle BPI = \sphericalangle BPA = \sphericalangle BCA = \gamma$, dobijamo $\varphi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 180^\circ$, što je ekvivalentno sa $\varphi = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \gamma$, tj. $\varphi = \alpha + \beta + \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

Analogno dokazujemo ostale dvije jednakosti. \square

Teorem 7.2. *Neka je I centar upisane kružnice u $\triangle ABC$ i F središte pripisane kružnice tom trouglu. Ako kružnica opisana $\triangle ABC$ siječe simetralu ugla kod vrha C u tački R , onda je $RI = RF$.*

Dokaz: Prema Teoremi 7.1 je $RA = RI$. Simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod vrha A su međusobno normalne, zbog čega je $\sphericalangle IAF = 90^\circ$, tj. $\triangle IAF$ je pravougli trougao sa hipotenuzom IF . Središte opisane kružnice $\triangle IAF$ je središte hipotenuze IF , a budući da je $RI = RA$ mora biti $RI = RF$ \square

Zadatak se dalje rješava kao na peti način.

Nadamo se da ste onda uvjereni u tačnost citata sa početka članka, međutim mi ne vjerujemo da će neko Bobillierovu formulu dokazivati na načine 4,5, i 6. Takvi dokazi su interesantni samo sakupljačima neuobičajenih dokaza, a takvih znamo da ima.

Literatura

- [1] Š. Arslanagić: *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
- [2] Š. Arslanagić, A. Muminagić: *Five new proofs of one trigonometric inequality in the triangle*, Mathematics and Informatics, Volume 56., Number 6., Sofia, 2013.
- [3] V. Blagojević: *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Srpsko Sarajevo, 2002.
- [4] J. Carstensen: *Trigonometri, systime a/s*, Herning, Denmark, 1994.
- [5] J. Carstensen: *Nipunkteriklen og vektore*, Matematik Magasinet 66, oktober 2012.
- [6] Z. Kurnik: *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Prvo izdanje, Element d.o.o., Zagreb, 2010.
- [7] A. Muminagić: *Bobillierova formula*, Osječka matematička škola 4,77-81, 2004.
- [8] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.
- [9] D. E. Wallis: *Vectors and nine-point circle*, The Mathematical gazette, Vol. 66, October 1982.

O pravilnom osmouglu

Dragoljub Milošević^a

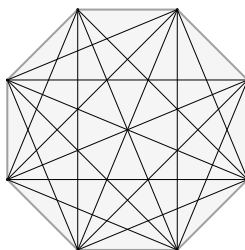
^a *Penzioner, Srbija*

Sažetak: U radu će biti riječi o definiciji i osnovnim karakteristikama pravilnog osmougla, izračunavanju površine u funkciji njegove stranice (polumjera opisane ili upisane kružnice), nekim njegovim konstrukcijama i raznim zadacima u vezi s njim.

1. Uvod

Poznato je da se mnogougao kod koga su sve stranice jednake i svi uglovi jednaki naziva *pravilni mnogougao*. Za pravilan osmougao znamo da vrijedi (Slika 1):

1. veličina unutrašnjeg ugla je 135° ,
2. broj dijagonala (kao i kod svakog osmougla) je jednak 20.



Slika 1: Pravilan osmougao sa dijagonalama.

Sada, rješavajući nekoliko zadataka, upoznat ćemo se sa nekim zanimljivim svojstvima pravilnog osmougla.

2. Površina pravilnog osmougla

Primjer 2.1. *Odrediti površinu pravilnog osmougla ako je duljina njegove stranice jednaka a .*

Rješenje: 1

Neka je zadan pravilni osmougao $ABCDEFGH$ (Slika 2). Nad stranicama AH i EF sa njegove unutrašnje strane konstruišimo kvadrate $AKLH$ i $EFLM$, pa spojimo tačke K i M sa tačkom C . Tako

Ciljna skupina: srednja škola

Rad preuzet: maj 2019.

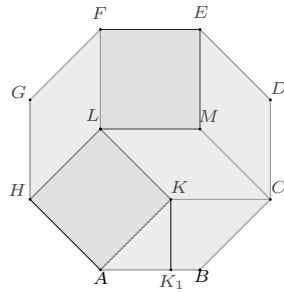
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

dobivamo dva podudarna kvadrata i četiri podudarna romba (duljina njihove stranice je a). S obzirom da je oštri (šiljasti) ugao romba 45° , na temelju Pitagorine teoreme, primjenjene na jednakokraki pravougli trougao KA_1K (KK_1 je duljina visine romba), imamo

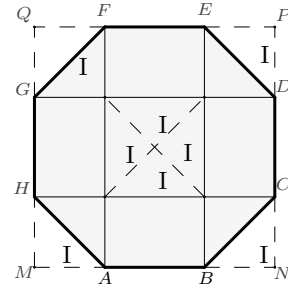
$$|AK_1|^2 + |KK_1|^2 = |AK|^2, \text{ to jest } 2|KK_1|^2 = a^2.$$

Oдавде je $KK_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ili $|KK_1| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (proširivanjem razlomka $\frac{a}{\sqrt{2}}$ sa $\sqrt{2}$). Površina pravilnog osmougla se dobije sabiranjem površina dobijena dva kvadrata i površina četiri romba, te je jednaka

$$P = 2a^2 + 4a \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2a^2(1 + \sqrt{2}).$$



Slika 2:



Slika 3:

Rješenje: 2

Povucimo dijagonale \overline{AF} , \overline{BE} , \overline{CH} i \overline{DG} , pa dopunimo pravilan osmougao $ABCDEFGH$ do kvadrata $MNPQ$ kao što je prikazano na Slici 3. Ta dopuna sadrži četiri jednakokraka pravouglu trougla, a od takva četiri dijela sastoji se upravo centralni kvadrat osmougla (dobijen u presjeku povučenih dijagonala). Prema tome, površina pravilnog osmougla je jednaka razlici površina većeg i manjeg kvadrata. Kako je

$$|DP| = |PE| = |FQ| = |QG| = |HM| = |MA| = |BN| = |NC| = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

dužina stranice većeg kvadrata je $a + a\sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2})$, a dužina stranice manjeg kvadrata je a . Sada je površina data sa

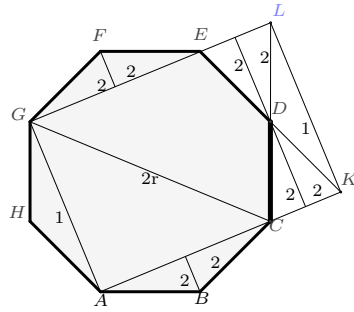
$$P = \left(a(1 + \sqrt{2})\right)^2 - a^2 = a^2(3 + 2\sqrt{2}) - a^2 = 2a^2(1 + \sqrt{2}).$$

□

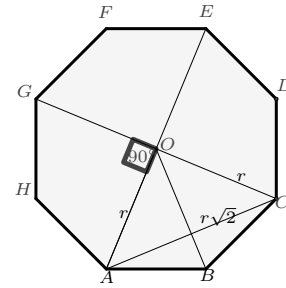
Primjer 2.2. Odrediti površinu pravilnog osmougla kod koga je poluprečnik opisane kružnice jednak r .

Rješenje: Neka je dat pravilan osmougao $ABCDEFGH$ čiji je poluprečnik opisane kružnice r . Produžimo dijagonale \overline{AC} i \overline{GE} do tačaka K i L , tako da je $|AK| = |GL| = 2r$ (Slika 4). Trougao ACG je jednakokrak i pravougli, sa hipotenuzom $|CG| = 2r$, pa je $|AC| = |AG| = r\sqrt{2}$. Jednakokraki trouglovi DKL i AGH (na Slici 4. obilježeni sa 1) su podudarni (pravilo SUS). Takođe, podudarni su i pravougli trouglovi na slici obilježeni sa 2 (pravilo SSU). To onda znači da je površina zadanog osmougla jednaka površini pravougaonika $AKLG$, čije su stranice $|AK| = 2r$ i $|AG| = r\sqrt{2}$. Dakle,

$$P = 2r \cdot r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r^2.$$



Slika 4:



Slika 5:

Rješenje: 2

Pravilni osmougao $ABCDEFGH$ sastoji se od četiri podudarna deltoida $ABCO$, $CDEO$, $EFGO$ i $GHAO$, gdje je O centar opisane kružnice oko osmougla (Slika 5). Deltoid ima dijagonale dužine r i $r\sqrt{2}$, pa je površina jednog deltoida jednaka $\frac{r \cdot r\sqrt{2}}{2}$, a površina datog osmougla je onda

$$P = 4 \frac{r \cdot r\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}r^2.$$

□

Primjer 2.3. Odrediti površinu pravilnog osmougla kod koga je poluprečnik upisane kružnice jednak h .

Rješenje: Posmatrajmo jedan od karakterističnih trouglova pravilnog osmougla $ABCDEFGH$, $\triangle ABO$ (Slika 6). Visina $OO_1 = h$ predstavlja poluprečnik upisane kružnice zadanog osmougla. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle AO_1$ imamo, $|OA|^2 = |AO_1|^2 + |OO_1|^2$, odnosno vrijedi

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Iz ranije dobijenih formula za površinu pravilnog osmougla u Zadatku 1. i Zadatku 2., to jest $P = 2a^2(1+\sqrt{2})$ i $P = 2\sqrt{2}r^2$, izražavanjem veličina a i r imamo,

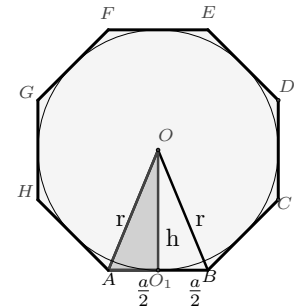
$$r^2 = \frac{P}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}P}{4} \quad \text{i} \quad a^2 = \frac{P}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{2}-1)P}{2}.$$

Koristeći jednakost (1) i gornje vrijednosti za r^2 i a^2 dobijamo

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{\sqrt{2}P}{4} - \frac{P}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{2}-1)P}{8} \\ &= \frac{P}{8}(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

Iz posljednjeg imamo da je $P = \frac{8h^2}{\sqrt{2}+1} = 8h^2(\sqrt{2}-1)$.

□



Slika 6:

3. Neke konstrukcije u vezi sa pravilnim osmouglom

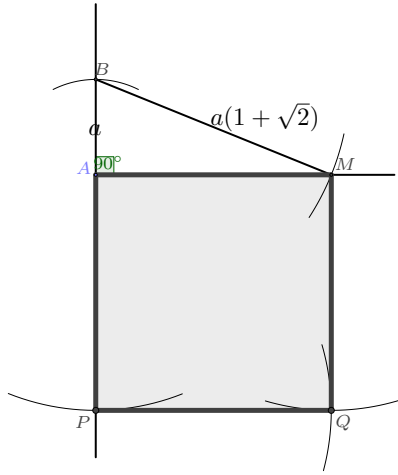
U drugom rješenju Zadatka 1. smo vidjeli kako se pravilni osmougao može "razrezati" na dijelove od kojih se može sastaviti figura koja se sastoji od većeg kvadrata iz koga je "izvađen" manji (centralni) kvadrat. U Prvom rješenju Zadatka 2. pravilni osmougao smo "pretvorili" u pravougaonik iste površine. Iskoristimo ove dvije konstrukcije za rješenje narednog zadatka.

Primjer 3.1. Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka površini pravilnog osmougla stranice a .

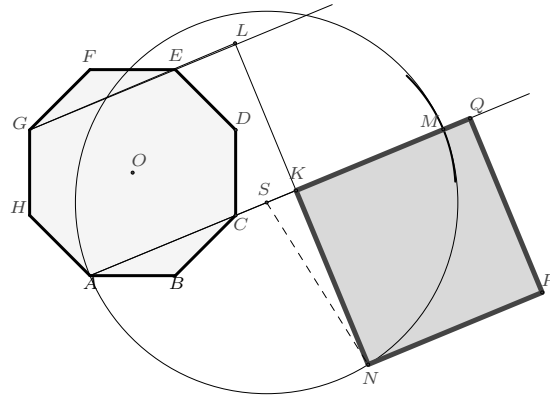
Rješenje: S obzirom da se površina pravilnog osmougla, koja ima vrijednost $P = 2a^2(1 + \sqrt{2})$, može zapisati na sljedeći način,

$$P = \left(a(1 + \sqrt{2})\right)^2 - a^2,$$

zaključujemo da je traženi kvadrat upravo kvadrat nad jednim katetom pravouglog trougla čija je hipotenuza $a(1 + \sqrt{2})$, a druga kateta a . Dakle, zadatak se svodi na konstrukciju pravouglog trougla čije su jedna kateta i hipotenuza zadate veličine (Slika 7).



Slika 7:



Slika 8:

Rješenje: 2

Produžimo dijagonale \overline{AC} i \overline{GE} do tačaka K i L , tako da je $|AK| = |GL| = |CG| = 2r$. Time smo zadani osmougao pretvorili u pravougaonik $AKGL$ iste površine. Produžimo sada stranicu \overline{AK} pravougaonika do tačke M , tako da je $|KM| = |KL|$. Odredimo središte S duži \overline{AM} i opišimo kružnicu centra S i poluprečnika $|AS|$. Ta kružnica siječe produžetak duži \overline{LK} u tački N . Kvadrat konstruisan nad duži \overline{KN} je traženi kvadrat.

Dokaz da smo dobili upravo traženi kvadrat se bazira na primjeni Pitagorine teoreme na $\triangle KSN$. Naime, kako je $|AS| = |SN| = \frac{1}{2}(|AK| + |KL|)$ i $|SK| = \frac{1}{2}(|AK| - |KL|)$, zaključujemo da je $|KN|^2 = |AK| \cdot |KL|$ (površina kvadrata $KNPQ$ jednaka je površini pravougaonika $AKLG$). \square

4. Još o pravilnom osmouglu

Iz Zadatka 2.1 znamo da je $P = 2a^2(1 + \sqrt{2})$, a iz Zadatka 2.2 smo imali da je $P = 2\sqrt{2}r^2$, gdje su a i r respektivno stranica i poluprečnik opisane kružnice nekog pravilnog osmougla. Iz ovih dviju relacija možemo doći do odnosa veličina a i r . Naime, izjednačavanjem izraza za površinu pravilnog osmougla je $2a^2(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}r^2$, iz čega onda dobijamo da vrijedi

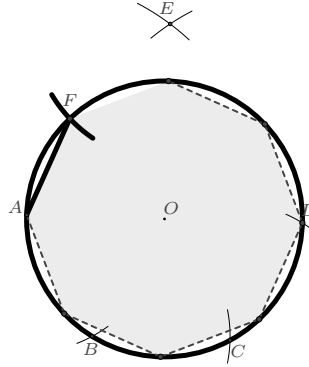
$$r = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}},$$

odnosno vrijedi,

$$a = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Ako je zadata kružnica $k(O, r)$ konstruisati pravilan osmougao kome je data kružnica opisana kružnica, koristeći se samo šestarom.

Na zadatoj kružnici odredimo tačke A, B, C i D tako da je $|AB| = |BC| = |CD| = |AO| = r$. Konstruišimo zatim jednakokraki trougao ADE , osnovice \overline{AD} i kraka $|AE| = |AC|$.



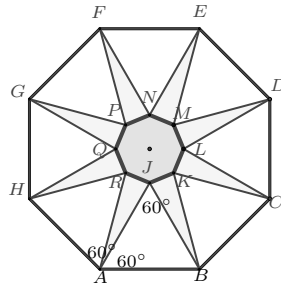
Slika 9:

Konstruišimo kružnicu $k_1(E, |OA|)$. Jedan od presjeka kružnice k_1 sa kružnicom k (onaj bliži tački A) označimo sa F . Sada su tačke A i F dva susjedna tjemena traženog pravilnog osmougla, a time je i stranica traženog osmougla određena sa \overline{AF} . Preostalih šest tjemena traženog osmougla dobijamo jednostavnim prenošenjem šestarom dobijene stranice, počev od tačke A .

Dakaz da je dobijena figura traženi pravilni osmougao zasniva se na primjeni Pitagorine teoreme, uzimajući u obzir da je $|AC| = \sqrt{3}r$ (stranica jednakokrakog trougla upisanog u kružnicu poluprečnika r) i $|OE| = \sqrt{|AC|^2 - |AO|^2} = \sqrt{2}r$.

Lema 4.1. *Zadat je pravilan osmougao. Nad svakom stranicom osmougla konstruišimo jednakokraničan trougao tako da treće tjeme tih trouglova pripada unutrašnjosti osmougla. Dokazati da ta tjemena formiraju novi pravilan osmougao.*

Dokaz : Konstrukcijom osam jednakokraničnih trouglova unutar datog pravilnog osmougla, dobili smo takođe i osam jednakokrakih trouglova (naprimjer, $\triangle ARJ$, Slika 10) čije osnovice formiraju takođe osmougao kod koga su sve stranice jednake. Da bi pokazali da je novodobijeni osmougao ptavilan, treba pokazati da je njegov unutrašnji ugao jednak 135° .



Slika 10:

Pomenuti jednakokraki trouglovi imaju ugao pri vrhu $135^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 15^\circ$. Zbog toga je zbir uglova na osnovici $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$. Tada je unutrašnji ugao $\angle KJR = 360^\circ - (60^\circ + 165^\circ) = 135^\circ$, što je i trebalo pokazati. \square

5. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 5.1. Tačke u kojima se sijeku po tri dijagonale pravilnog osmougla čine tjemena novog pravilnog osmougla. Dokazati!

Zadatak 5.2. Nad svakom stranicom pravilnog osmougla $ABCDEFGH$, sa spoljašnje strane, konstruišimo po jedan jednakostraničan trougao, $\triangle BAA_1$, $\triangle CBB_1$, $\triangle DCC_1$, $\triangle EDD_1$, $\triangle FEE_1$, $\triangle GFF_1$, $\triangle HGG_1$ i $\triangle AHH_1$. Dokazati da su tačke A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 , F_1 , G_1 i H_1 tjemena pravilnog osmougla.

Zadatak 5.3. Dat je pravilan osmougao. Nacrtajmo sve prave određene stranicama osmougla.

1. Tačke u kojima se sijeku prave kojima pripadaju stranice pravilnog osmougla čine tjemena novog pravilnog osmougla. Dokazati!
2. Odrediti odnos površina takvih osmouglova.

Zadatak 5.4. Ako je $|AB| = a$ i $|AD| = d$ u pravilnom osmouglu $ABCDEFGH$, dokazati da je $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 2$!

Zadatak 5.5. Dokazati da u pravilnom osmouglu vrijede sljedeće jednakosti:

1. $h = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{2})$.
2. $a = 2h(\sqrt{2} - 1)$.
3. $r = h\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.
4. $h = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Zadatak 5.6. 1. Izračunati dužine dijagonala \overline{AC} i \overline{AD} pravilnog osmougla $ABCDEFGH$, ako mu je stranica dužine a .

2. Da li vrijedi jednakost: $|AD|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$?

Zadatak 5.7. Dokazati da je površina kružnog prstena koga čine opisana i upisana kružnica pravilnog osmougla jednaka površini kruga prečnika a , gdje je a stranica tog osmougla.

Zadatak 5.8. Tjemena pravilnog osmougla $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8$ pripadaju stranicama kvadrata $ABCD$.

1. Ako je dužina stranice kvadrata jednaka a , izračunati stranicu i poveršinu osmougla.
2. Da li je tačna tvrdnja: Dijagonala kvadrata $ABCD$ jednaka je zbiru stranice tog kvadrata i stranice datog osmougla?
3. Konstruisati pravilan osmougao čija tjemena pripadaju stranicama datog kvadrata.

Zadatak 5.9. Zadana je prava p i tačka O izvan te prave. Konstruisati pravilan osmougao kome je tačka O centar, a jedna stranica pripada pravoj p .

Literatura

- [1] D. Milošević: *Površina pravilnoga osmokatnika*, Presek (Ljubljana), VI,4 (1979/80), 224 - 225.
- [2] M. Prvanović: *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.
- [3] R. Tošić: *O pravilnom dvanaestouglu*, Matematički list (Beograd), L, 3 (2015/16), 1 - 8.

O značaju diskriminante kvadratne jednačine pri rješavanju nelinearnih Diofantovih jednačina

Šefket Arslanagić^a

^aPMF, Sarajevo

Sažetak: Neke nelinearne Diofantove jednačine se mogu efikasno riješiti ako se mogu napisati u obliku kvadratne jednačine po jednoj od promjenljivih te koristiti njenu diskriminantu. U radu je ovaj metod rješavanja nelinearnih Diofantovih jednačina ilustriran nekim vrlo zanimljivim primjerima.

1. Uvod

Poznato je da se kvadratne jednačine obrađuju u drugom razredu srednje škole. Njihova uloga u daljem toku školovanja je vrlo značajna jer se primjenjuje u svim oblastima matematike. Zbog toga ćemo se prvo ukratko podsjetiti najvažnijih činjenica u vezi s kvadratnom jednačinom.

Kvadratna jednačina ima oblik

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0) \quad (1)$$

a izraz

$$D = b^2 - 4ac$$

se naziva *diskriminantom* kvadratne jednačine (1) i pri tome su njena rješenja data sa

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Što se tiče diskriminante D , mogu nastupiti sljedeća tri slučaja:

1. $D > 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $x_1 \neq x_2$;
2. $D = 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ i $x_1 = x_2$;
3. $D < 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ (\mathbb{C} - skup kompleksnih brojeva).

Dakle, kvadratna jednačina (1) ima realna rješenja ako je $D \geq 0$.

Ove osnovne činjenice o kvadratnoj jednačini svima su dobro poznate, a to nam dobro dođe pri njihovoj primjeni, kao što je slučaj s primjenom u rješavanju (nešto težih) *Diofantovih* jednačina, a što ćemo demonstrirati na nekoliko primjera u narednoj sekciji.

Ciljna skupina: srednja škola

Ključne riječi: Diofantova jednačina, kvadratna jednačina, diskriminanta

Rad preuzet: januar 2019.

Kategorizacija: Stručno-metodički rad

2. Primjena u rješavanju Diofantovih jednačina

Primjer 2.1. Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine: $x^2 + y^2 + 3x + 1 = 0$.

Rješenje: Datu jednačinu posmatrajmo kao kvadratnu jednačinu po x . Imamo

$$x^2 + 3x + (y^2 + 1) = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}) \implies D = 9 - 4(y^2 + 1) = 5 - 4y^2.$$

Da bi jednačina imala realna rješenja, mora biti $D \geq 0$, tj.

$$5 - 4y^2 \geq 0 \implies y^2 \leq \frac{5}{4} \implies |y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \implies y \in \{-1, 0, 1\}.$$

1° Za $y = -1$ je $D = 1$, odakle je $x_1 = -2$ ili $x_2 = -1$, pa je $(x, y) \in \{(-2, -1), (-1, -1)\}$.

2° Za $y = 0$ je $D = \sqrt{5}$, a ovaj slučaj otpada jer $x \notin \mathbb{Z}$.

3° Za $y = 1$ je $D = 1$, dakle slijedi da je $x_1 = -2$ ili $x_2 = -1$, pa je $(x, y) \in \{(-2, 1), (-1, 1)\}$.

Dakle, imamo sljedeća rješenja date jednačine

$$(x, y) \in \{(-2, -1), (-1, -1), (-2, 1), (-1, 1)\}.$$

□

Primjer 2.2. Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine: $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

Rješenje: Napišimo datu jednačinu u obliku

$$x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

i posmatrajmo ju kao kvadratnu jednačinu po x .

Sada je

$$x_{1,2} = \frac{y + 1 \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2},$$

gdje je $D = -3y^2 + 6y + 1$. Prema uslovima zadatka mora biti $D \geq 0$, tj.

$$-3y^2 + 6y + 1 \geq 0 \implies y \in \left[\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right],$$

a odavde, zbog $y \in \mathbb{Z}$, slijedi $y \in \{0, 1, 2\}$. Slično kao u prethodnom primjeru, nalazimo rješenja date jednačine

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}.$$

□

Primjer 2.3. Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine: $5x^2 + y^2 - 2xy - 8y + 20 = 0$.

Rješenje: Datu jednačinu možemo pisati kao kvadratnu jednačinu po x :

$$5x^2 - 2yx + (y^2 - 8y + 20) = 0.$$

Ovdje je

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{-4y^2 + 40y - 100}}{5},$$

pa je

$$D = -4y^2 + 40y - 100 = -4(y^2 - 10y + 25) = -4(y - 5)^2 \geq 0 \implies y = 5.$$

Za $y = 5$ dobijamo $x = 1$ te imamo samo jedno traženo rješenje date jednačine: $(x, y) = (1, 5)$.

□

Primjer 2.4. *Riješiti jednačinu*

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

u skupu cijelih brojeva.

Rješenje: Datu jednačinu možemo posmatrati kao kvadratnu jednačinu po x :

$$x^2 + yx + y^2 - 1 = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}),$$

za čiju diskriminantu vrijedi

$$D = -3y^2 + 4 \geq 0 \implies y^2 \leq \frac{4}{3} \implies -\frac{4}{3} \leq y \leq \frac{4}{3},$$

pa zbog zahtjeva $y \in \mathbb{Z}$, slijedi da je $y \in \{-1, 0, 1\}$. Razmotrimo svaki od tih slučajeva.

1° Za $y = -1$ je $x^2 - x = 0$, odakle je $x_1 = 0$ ili $x_2 = 1$, pa je $(x, y) \in \{(0, -1), (1, -1)\}$.

2° Za $y = 0$ je $x^2 - 1 = 0$, odakle je $x_1 = -1$ ili $x_2 = 1$, pa je $(x, y) \in \{(-1, 0), (1, 0)\}$

3° Za $y = 1$ je $x^2 + x = 0$, odakle je $x_1 = 0$ ili $x_2 = -1$, pa je $(x, y) \in \{(0, 1), (-1, 1)\}$.

Dakle, imamo sljedeća rješenja:

$$(x, y) \in \{(0, -1), (1, -1), (-1, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 1)\}.$$

□

Primjedba 2.5. *Preporučujemo da se riješe jednačine iz prethodnih primjera posmatrajući ih kao jednačine po drugoj promjenljivoj.*

Primjer 2.6. *Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine*

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0.$$

Rješenje: Na prvi pogled izgleda vrlo komplicirana jednačina. ali neće biti teško riješiti je ako ju posmatramo kao kvadratnu jednačinu po promjenljivoj x , tj.

$$8x^2 + 4(y^2 + y - 10)x + y^4 - 11y^2 - 8y + 52 = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

Tada imamo

$$D = 16(y^2 + y - 10)^2 - 32(y^4 - 11y^2 - 8y + 52) = -16(y^2 - y - 2)^2 \leq 0.$$

Pošto mora biti $D \geq 0$, to u obzir dolazi samo $D = 0$, tj. $y_1 = 2$ ili $y_2 = -1$. Zbog $D = 0$ sada imamo

$$x_{1,2} = -\frac{y^2 + y - 10}{4},$$

a odavde

$$x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Dakle, imamo samo rješenje $(x, y) = (1, 2)$.

□

Primjer 2.7. Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine

$$y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0.$$

Rješenje: Opet na prvi pogled vrlo nezgodna jednačina. Međutim, ako je posmatramo kao kvadratnu jednačinu po promjenljivoj x , imamo

$$yx^2 + (y^2 - 36)x + y^2(y - 12) + 36y = 0,$$

čija je diskriminanta

$$\begin{aligned} D &= (y^2 - 36)^2 - 4y^2(y^2 - 12y + 36) = (y^2 - 36)^2 - [2y(y - 6)]^2 \\ &= [y^2 - 36 - 2y(y - 6)][y^2 - 36 + 2y(y - 6)] \\ &= -3(y - 6)^2(y^2 - 4y - 12). \end{aligned}$$

Pošto mora biti $D \geq 0$, to dobijamo

$$y^2 - 4y - 12 \leq 0 \implies (y - 6)(y + 2) \leq 0 \implies y \in [-2, 6].$$

Imamo sljedeće slučajeve:

$$1^\circ y = -2 \implies -2x^2 - 32x - 128 = 0 \implies x^2 + 16x + 64 = 0 \implies (x + 8)^2 = 0 \implies x = -8;$$

$$2^\circ y = -1 \implies D = 21 \cdot 7^2 = 3 \cdot 7^3 \text{ nije potpun kvadrat pa ovaj slučaj ne dolazi u obzir;}$$

$$3^\circ y = 0 \implies -36x = 0 \implies x = 0;$$

$$4^\circ y = 1 \implies D = 3^2 \cdot 5^3 \text{ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir;}$$

$$5^\circ y = 2 \implies D = 3 \cdot 4^4 \text{ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir;}$$

$$6^\circ y = 3 \implies D = 3^4 \cdot 5 \text{ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir;}$$

$$7^\circ y = 4 \implies 4x^2 - 20x + 16 = 0 \implies (x - 1)(x - 4) = 0 \implies x_1 = 1 \vee x_2 = 4;$$

$$8^\circ y = 5 \implies D = 21 \text{ nije potpun kvadrat pa i ovaj slučaj ne dolazi u obzir;}$$

$$9^\circ y = 6 \implies 6x^2 = 0 \implies x = 0.$$

Dakle, imamo sljedeća cjelobrojna rješenja date jednačine:

$$(x, y) \in \{(-8, -2), (0, 0), (0, 6), (1, 4), (4, 4)\}.$$

□

Primjedba 2.8. S pravom možemo reći da se mnoge nelinearne Diofantove jednačine mogu efikasno riješiti ako se mogu napisati u obliku kvadratne jednačine po jednoj od promjenljivih te koristiti njenu diskriminantu D . Sigurni smo da bi se sve jednačine iz navedenih primjera znatno teže riješile na neki drugi način. Pokušajte!

Literatura

- [1] T. Andreescu, D. Andrica, *An Introduction to Diophantine Equations*, Gil Publishing House, Zalau (Romania), 2002.
- [2] V. Andrić, *Diofantove jednačine (Priručnik za dodatnu nastavu matematike za osnovne i srednje škole)*, Krug, Beograd, 2006.
- [3] Š. Arslanagić, I. Glogić, *Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1995.-2008.)*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
- [4] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heilderberg, 1997.
- [5] M. Stanić, N. Ikodinović, *Teorija brojeva - Zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2004.

Iracionalne jednačbe i nejednačbe

Mehmed Nurkanović^a, Zehra Nurkanović^b

^a*Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

^b*Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

Sažetak: U radu se detaljnije razmatraju iracionalne jednačbe i nejednačbe, sa i bez parametara. Uz osnovne teorijske napomene kompleksnost ovih jednačbi i nejednačbi ilustrirana je nekim karakterističnim primjerima.

1. Uvod

Praksa pokazuje da su iracionalne jednačbe i nejednačbe možda i najkompliciranije od svih jednačbi i nejednačbi elementarne algebre. Naime, razlog za to je nepostojanje općeg postupka za njihovo rješavanje. Tako je moguće riješiti samo neke jednostavne tipove iracionalnih jednačbi i nejednačbi, dok je bilo kakav pokušaj njihove klasifikacije prema načinu rješavanja relativno vrlo složen. U ovom radu bit će ipak napravljena osnovna klasifikacija ovih jednačbi prema načinu rješavanja (s parnim ili neparnim korijenima) i date osnovne teorijske postavke koje će omogućiti njihovu ilustraciju na nekoliko karakterističnih primjera s pažljivo odabranim jednačbama i nejednačbama s i bez parametara. Treba istaknuti da se vrlo često ove jednačbe i nejednačbe pojavljuju na raznim nivoima takmičenja iz matematike za učenike srednjih škola i obično veoma mali broj takmičara uspije da ih riješi. Poseban problem je ako se zahtijeva diskusija rješenja iracionalne jednačbe ili nejednačbe u ovisnosti o nekom realnom parametru.

2. Iracionalne jednačbe

Definicija 2.1. *Jednačba u kojoj se nepoznanica javlja i pod korijenom naziva se **iracionalnom** jednačbom.*

Korijen se u tom slučaju uzima samo kao aritmetički.

Osnovni metod za rješavanje iracionalnih jednačbi je metod eliminacije korijena. Taj metod se sastoji u tome da se jednačba algebarskim transformacijama (prije svega stepenovanjem) svede na jednačbu u kojoj se nepoznanice ne pojavljuju pod znakom korijena. Međutim, stepenovanje ne dovodi uvijek do ekvivalentne jednačbe, već do jednačbe koja je samo posljedica polazne.

Primjer 2.2. *a) Jednačba $\sqrt{x} = -1$ nema rješenja (u skupu realnih brojeva), ali se nakon kvadriranja dobije $x = 1$.*

b) $\sqrt{x} = x - 2 \implies x = x^2 - 4x + 4 \implies x^2 - 5x + 4 = 0 \implies (x = 1 \vee x = 4)$. Provjerom ustanovimo da $x = 1$ nije rješenje polazne jednačbe, već samo $x = 4$.

a) Iracionalne jednačbe s neparnim korijenima

Pri rješavanju ovakvih jednačbi (da bismo se "oslobodili" korijena) koristimo se sljedećim teoremom.

Teorem 2.3. *Jednačbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne za neparan broj n ($n \in \mathbb{N}$).

Kada se radi s iracionalnim jednačbama s trećim korijenima ili korijenima višeg reda, postupak racionalizacije (tj. oslobađanja od korijena) obično dovodi do vrlo složenih jednačbi. Zbog toga se one često rješavaju određenim smjenama ili nekim drugim 'trikovima'. Sljedeća dva primjera to dobro ilustriraju, ali i pokazuju da se procesom racionalizacije ne dobija uvijek niz ekvivalentnih jednačbi.

Primjer 2.4. *Riješiti jednačbu*

$$\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x} = 3. \quad (1)$$

Rješenje: Definiciono područje je skup \mathbb{R} . Koristeći identitet

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3, \quad (2)$$

nakon stepenovanja date jednačbe s tri, dobijamo

$$\begin{aligned} (1) \iff 3-x + 3\sqrt[3]{(3-x)(6+x)} \underbrace{\left(\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x}\right)}_{\stackrel{(1)}{=} 3} + 6+x &= 27 \\ \iff \sqrt[3]{(3-x)(6+x)} = 2 \iff (3-x)(6+x) &= 8 \\ \iff x^2 + 3x - 10 = 0 \iff (x=2 \vee x=-5). \end{aligned}$$

Budući da smo u prvom koraku izvršili zamjenu zbira dva kubna korijena brojem 3 (prema(1)), obavezno treba izvršiti provjeru dobijenih vrijednosti za x , tj. provjeriti da li zadovoljavaju polaznu jednačbu. Ovdje je to zadovoljeno. \square

Primjer 2.5. *Riješiti jednačbu*

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}. \quad (3)$$

Rješenje: Analogno prethodnom primjeru, imamo

$$\begin{aligned} (3) \iff x+1 + 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)} \underbrace{\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}\right)}_{\stackrel{(3)}{=} \sqrt[3]{x-1}} + 3x+1 &= x-1 \\ \implies 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} &= -3x-3 \\ \iff (x^2-1)(3x+1) &= -(x+1)^3 \\ \iff x^2(x+1) = 0 \iff (x=0 \vee x=-1). \end{aligned}$$

Neposrednim uvrštavanjem ovih vrijednosti u datu jednačbu zaključujemo da je samo $x = -1$ njeno rješenje. \square

Postavlja se pitanje: u čemu se razlikuju ove dvije jednačbe iz posljednja dva primjera, bolje rečeno u čemu je razlika u rješavanju tih jednačbi kada je korišten isti metod? Odgovor je zasnovan na činjenici da smo u prvom slučaju opći izraz predstavljen lijevom stranom jednačbe zamijenili brojem, a u drugom ponovo novim izrazom (uočite da je u drugom koraku ovog primjera stavljen znak ' \implies ' a ne znak ekvivalencije ' \iff ', te nismo dobili niz ekvivalentnih jednačbi).

b) Iracionalne jednačbe s parnim korijenima

U slučaju iracionalne jednačbe u kojoj se pojavljuju parni korijeni treba voditi računa o definicionom području te jednačbe, to jest o skupu dopustivih vrijednosti nepoznanice za koje su nenegativne sve potkorjene veličine parnih korijena. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.6. *Za paran broj n jednačbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne u oblasti u kojoj je

$$f(x) \geq 0 \quad i \quad g(x) \geq 0,$$

ili

$$f(x) < 0 \quad i \quad g(x) < 0.$$

Specijalno,

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Uočimo da izraz $f(x)$ pod korijenom treba da je nenegativan (tj. $f(x) \geq 0$). Međutim, to je automatski zadovoljeno, jer je

$$f(x) = g^2(x) \geq 0.$$

Primjer 2.7. *Riješiti jednačbu $x + 1 = \sqrt{x + 7}$.*

Rješenje: Prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} x + 1 &= \sqrt{x + 7} \iff ((x + 1)^2 = x + 7 \wedge x + 1 \geq 0) \\ &\iff [(x = 2 \vee x = -3) \wedge x \geq -1] \iff x = 2. \end{aligned}$$

□

Primjer 2.8. *Riješiti jednačbu*

$$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 4.$$

Rješenje: $DP : (2x + 1 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0) \iff x \geq 3$

Budući da je lijeva strana date nejednačbe nenegativna, ona se smije kvadrirati, naravno za one vrijednosti nepoznanice koje zadovoljavaju DP . Dakle, data nejednačba je, uz uvjet DP , ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} 2x + 1 + x - 3 + 2\sqrt{(2x + 1)(x - 3)} &= 16 \iff 2\sqrt{(2x + 1)(x - 3)} = 18 - 3x \\ &\iff \begin{cases} 18 - 3x \geq 0 \\ 4(2x + 1)(x - 3) = (18 - 3x)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Prema tome, uzimajući u obzir definiciono područje, data nejednačba je ekvivalentna sa

$$(x = 4 \vee x = 84 \wedge x \geq 3 \wedge x \leq 6) \iff x = 4.$$

□

Već smo ranije napomenuli da se iracionalne jednačbe s trećim, četvrtim itd. korijenima vrlo često rješavaju određenim smjenama. Sljedeći primjer nam pokazuje kako se u određenim situacijama dobro odabranim smjenama iracionalna jednačba može efikasno riješiti.

Primjer 2.9. *Riješiti jednačbu*

$$\sqrt[4]{47-2x} + \sqrt[4]{35+2x} = 4.$$

Rješenje: DP: $x \in \left[-\frac{35}{2}, \frac{47}{2}\right]$. Uvedimo smjene: $u = \sqrt[4]{47-2x}, v = \sqrt[4]{35+2x}$. Tako dobijamo sljedeći sistem jednačbi

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= 82, \\ u + v &= 4. \end{aligned}$$

Transformacijom lijeve strane prve jednačbe, te uvođenjem smjene $t = uv$, dobijamo

$$\begin{aligned} u^4 + v^4 &= (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = \left[(u+v)^2 - 2uv\right]^2 - 2u^2v^2 \\ &= (16 - 2t)^2 - 2t^2, \end{aligned}$$

odnosno dobijamo kvadratnu jednačbu

$$t^2 - 32t + 87 = 0,$$

s rješenjima $t_1 = 3, t_2 = 29$.

Na taj način dobijamo sljedeća dva sistema jednačbi

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 3, \end{cases} \quad \text{ i } \quad \begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 29. \end{cases}$$

Rješenja prvog sistema su uređeni parovi $(1, 3)$ i $(3, 1)$, odakle slijedi $x_1 = -17, x_2 = 23$. Drugi sistem nema realnih rješenja. Uočimo da oba rješenja pripadaju definicionom području date jednačbe, tako da su to ujedno njena rješenja. \square

b1) *Iracionalne jednačbe s parametrima*

Istaknimo da su iracionalne jednačbe s parametrima posebno komplicirane. Ilustrirat ćemo to sljedećim primjerima.

Primjer 2.10. *Diskutirati rješenje jednačbe*

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x, \tag{4}$$

u ovisnosti o realnom parametru p .

Rješenje: DP: $x^2 - p \geq 0 \wedge x^2 - 1 \geq 0$, pa razlikujemo sljedeće slučajeve

$$i) p \leq 1 \implies DP : x \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty),$$

$$ii) p > 1 \implies DP : x \in \langle -\infty, -\sqrt{p}] \cup [\sqrt{p}, +\infty)$$

No, uočimo sljedeće: $L \geq 0 \implies D = x \geq 0$ (L označava lijevu stranu, a D desnu stranu date jednačbe), pa zbog toga i zbog DP u obzir dolaze sljedeće vrijednosti za x :

$$p \leq 1 \implies x \in [1, +\infty), \tag{5}$$

$$p > 1 \implies x \in [\sqrt{p}, +\infty). \tag{6}$$

Uz uvjete (5) ili (6) imamo:

$$\begin{aligned} (4) &\iff x^2 - p + 4x^2 - 4 + 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = x^2 \\ &\iff 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = p + 4 - 4x^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Desna strana posljednje jednadžbe (7) mora biti nenegativna, to jest mora biti

$$x^2 \leq \frac{p+4}{4}. \quad (8)$$

Uz uvjet (8) imamo

$$\begin{aligned} (7) \quad &\Longleftrightarrow 16(x^2 - p)(x^2 - 1) = p^2 + 8p + 16 - 8(p+4)x^2 + 16x^4 \\ &\Longleftrightarrow 8(2-p)x^2 = (p-4)^2 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)}, \end{aligned}$$

odakle neposredno slijedi da mora biti $p < 2$. Provjerimo sada uvjet (8):

$$x^2 \leq \frac{p+4}{4} \Longleftrightarrow \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \leq \frac{p+4}{4} \Longleftrightarrow 3p^2 - 4p \leq 0 \Longleftrightarrow p \in \left[0, \frac{4}{3}\right].$$

Zbog toga preostaje provjeriti još samo uvjete (5) i (6) za $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq p \leq 1 &\Longrightarrow \left(x^2 \geq 1 \Longleftrightarrow \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geq 1 \Longleftrightarrow p^2 \geq 0 \right), \\ p \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right] &\Longrightarrow \left(x^2 \geq p \Longleftrightarrow \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geq p \Longleftrightarrow (3p-4)^2 \geq 0 \right), \end{aligned}$$

što je zadovoljeno u oba slučaja.

Rezultat: $x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$ za $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$; za ostale vrijednosti parametra p jednadžba nema rješenja. \square

Primjer 2.11. *Diskutirati rješenje jednadžbe*

$$\sqrt{x-2} = x + a$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

Rješenje: Jasno je da treba biti $x \geq 2$ i $x \geq -a$. Razlikujemo dva slučaja:

$$-a < 2, \text{ tj. } a > -2: \quad x \geq 2 \quad (9)$$

i

$$-a \geq 2, \text{ tj. } a \leq -2: \quad x \geq -a. \quad (10)$$

Uz te uvjete data jednadžba je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} x-2 &= x^2 + 2ax + a^2 \Longleftrightarrow x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x_{\pm} = \frac{1}{2}(1-2a \pm \sqrt{-4a-7}). \end{aligned}$$

Oдавde slijedi da data jednadžba nema rješenja kada je $-4a-7 < 0$, to jest kada je $a > -\frac{7}{4}$. U slučaju kada je $a = -\frac{7}{4}$, polazna jednadžba ima rješenje $x = \frac{9}{4}$, a za $a < -\frac{7}{4}$, imamo da je $x_{\pm} \in \mathbb{R}$. Treba vidjeti samo kada te vrijednosti zadovoljavaju uvjete (9) i (10).

i) Za $a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$ imamo

$$x_+ \geq 2 \iff \sqrt{-4a-7} \geq 3+2a,$$

što je za sve promatrane vrijednosti od a zadovoljeno (naime, $3+2a < 0$, za sve $a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$), pa je x_+ rješenje date jednačbe. Također,

$$x_- \geq 2 \iff -3-2a \geq \sqrt{-4a-7} \iff (a+2)^2 \geq 0$$

$$(\text{jer je } -3a-2 > 0 \text{ za } a \in \left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle),$$

što je uvijek zadovoljeno, pa je i x_- rješenje.

ii) Za $a \in \langle -\infty, -2] \text{ imamo}$

$$x_+ \geq -a \iff 1 + \sqrt{-4a-7} \geq 0,$$

što je očito uvijek zadovoljeno, pa je x_+ rješenje date jednačbe. Također,

$$x_- \geq -a \iff 1 \geq \sqrt{-4a-7} \iff a \geq -2.$$

Pošto je $a \leq -2$, to znači da je x_- rješenje samo za $a = -2$.

Rezime:

1° Za $a \in \langle -\infty, -2 \rangle$ jednačba ima jedinstveno rješenje $x_+ = \frac{1-2a+\sqrt{-4a-7}}{2}$.

2° Za $a \in \left[-2, -\frac{7}{4} \right]$ jednačba ima dva rješenja $x_{\pm} = \frac{1}{2} (1 - 2a \pm \sqrt{-4a-7})$.

3° Za $a = -\frac{7}{4}$ jednačba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{9}{4}$.

4° Za $a \in \left\langle -\frac{7}{4}, +\infty \right\rangle$ jednačba nema rješenja.

□

○ ○ ○

Zadaci za samostalan rad

Riješiti sljedeće jednačbe:

1. $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1.$

2. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$

3. $\sqrt[3]{2x+17} - \sqrt[3]{2x-37} = 6.$

4. $\sqrt[3]{4x^2+10x+4} + \sqrt[3]{2x^2-5x-3} = \sqrt[3]{2x+1}.$

5. $x - \sqrt[3]{x^2-x-1} = 1.$

6. $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}.$

7. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}.$

$$8. x + \sqrt{1 - 15x} = 3.$$

$$9. a) \sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = 5,$$

$$b) \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = 7.$$

$$10. \sqrt{2x+14} - \sqrt{x+5} = \sqrt{x-7}.$$

$$11. \sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{2(x^2+4x+6)}.$$

$$12. \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x - \sqrt{x^2-1}} + \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = 34.$$

$$13. \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$$

$$14. \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

$$15. \sqrt{3x^2+5x-8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1.$$

$$16. a) \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

$$b) \sqrt[4]{629-x} + \sqrt[4]{77+x} = 8.$$

Diskutirati rješenja sljedećih jednačbi u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$:

$$17. \sqrt{2-x} = -\frac{x}{2} + a.$$

$$18. \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = (a+1) \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

$$19. \sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1-\sqrt{x}} = a.$$

$$20. \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x.$$

3. Iracionalne nejednačbe

Definicija 3.1. *Nejednačba u kojoj se nepoznanica nalazi i pod korijenom zove se **iracionalna nejednačba**.*

Problematika rješavanja iracionalnih nejednačbi slična je problematici rješavanja iracionalnih jednačbi. Zbog toga su i metodi za njihovo rješavanje dosta slični, ali ima i bitnih razlika o kojima itekako valja voditi računa. Tu se prije svega misli na poteškoće koje se javljaju kao rezultat množenja nejednačbe negativnim brojem, što prouzrokuje promjenu smisla nejednakosti. Naročito je opasno izvoditi neoprezno i nekritički množenje nejednačbe brojnim izrazom u kojem figurira nepoznanica. Zato se preporučuje da se to nikad i ne radi, osim u slučaju kada za brojni izraz znamo da je pozitivan ili negativan za sve dozvoljene vrijednosti nepoznanice. S druge strane, posebnu pažnju moramo posvetiti i kvadriranju date nejednačbe u cilju oslobađanja od kvadratnog korijena. To se smije raditi samo u slučaju kada su i lijeva i desna strana nejednačbe nenegativne. Da je kvadriranje nedozvoljeno u slučaju kad su obje strane nejednačbe negativne pokazuje sljedeći primjer: ako tačnu nejednakost $-4 < -2$ kvadiramo, dobit ćemo nejednakost $16 < 4$, koja je netačna. Slično će se dogoditi i u slučaju $-3 < 2$. S druge strane, nakon kvadriranja nejednakosti $-1 < 2$, dobit ćemo tačnu nejednakost. Dakle, ako je barem jedna strana nejednakosti negativna, nismo sigurni da li ćemo nakon kvadriranja dobiti tačnu nejednakost. Prema tome, treba strogo voditi računa o sljedećem pravilu:

$$(L < D \wedge L \geq 0 \wedge D \geq 0) \iff L^2 < D^2. \quad (11)$$

Pri tome se nejednakost $<$ može zamijeniti bilo kojom od nejednakosti: $>$, \geq ili \leq .

Ako se ne držimo ovog pravila, mogu nastupiti različite problematične situacije. Pokazuje nam to sljedeći jednostavni primjer.

Primjer 3.2. Riješiti sljedeće nejednadžbe:

$$a) \sqrt{x} < 2; \quad b) \sqrt{x} < -2; \quad c) \sqrt{x} > 2; \quad d) \sqrt{x} > -2.$$

Rješenje: Uočimo da je definiciono područje svake od nejednadžbi $x \geq 0$.

a) Obje strane ove nejednadžbe su nenegativne, pa se može primijeniti gornje pravilo kvadriranja nejednadžbe, nakon čega dobijemo $x < 4$. Uzimajući u obzir definiciono područje, vidimo da mora biti $x \in [0, 4)$ i to je traženi skup rješenja nejednadžbe.

b) Desna strana nejednadžbe je negativan broj, pa se ne smije kvadrirati. No, budući da je lijeva strana nejednadžbe nenegativna, jasno je da taj broj ne može biti manji od negativnog broja na desnoj strani. Dakle, u ovom slučaju nejednadžba nema rješenja.

c) Kao i u slučaju a) smijemo kvadrirati nejednadžbu, nakon čega dobijemo $x > 4$. Upoređujući to s DP , dobijamo skup rješenja nejednadžbe $\langle 4, +\infty \rangle$.

d) Ni ovdje ne smijemo kvadrirati nejednadžbu, jer je desna strana negativna. Kako je, međutim, lijeva strana nenegativna, ona je uvijek veća od desne strane. Zato je skup rješenja skup svih vrijednosti nepoznanice koje zadovoljavaju DP , tj. $x \in [0, +\infty)$.

□

Vrlo je bitno promatrati sljedeća četiri tipa iracionalnih nejednadžbi:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[n]{f(x)} > g(x), \quad \sqrt[n+1]{f(x)} < g(x), \quad \sqrt[n+1]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (12)$$

Posljednja dva tipa su jednostavna, dok su prva dva kompliciranija i zato obratimo posebnu pažnju na njih.

U prvoj nejednadžbi je $DP : f(x) \geq 0$ i lijeva strana je nenegativna. Zbog navedenog pravila kvadriranja nejednakosti (11) i stroge nejednakosti desna strana nejednadžbe mora biti pozitivna, tj. $g(x) > 0$. Uz ta dva uvjeta, nakon stepenovanja sa $2n$, dobijamo $f(x) < [g(x)]^{2n}$. Dakle, vrijedi sljedeći teorem.

Primjedba 3.3. Naravno, u svim slučajevima treba uključiti i definiciona područja funkcija f i g , što u daljem tekstu nećemo posebno isticati, ali će se podrazumijevati.

Teorem 3.4. Nejednadžba

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalentna je sistemu nejednadžbi i to:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < [g(x)]^{2n} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Primjer 3.5. Riješiti nejednadžbu $\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3$.

Rješenje: Prema prethodnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3 &\iff [0 \leq x^2 - 5x + 4 < (x - 3)^2 \wedge x - 3 > 0] \\ &\iff \{x \in \langle -\infty, 1] \cup [4, +\infty) \wedge x < 5 \wedge x > 3\} \\ &\iff x \in [4, 5). \end{aligned}$$

□

I u drugoj nejednadžbi u (12) je $DP : f(x) \geq 0$ i lijeva strana je nenegativna. Ovdje su moguća dva slučaja: da je desna strana negativna ili da je nenegativna. Ako je $g(x) < 0$, tada je rješenje svako x iz DP . Dakle, u ovom slučaju skup rješenja R_1 nejednadžbe ima oblik

$$R_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0 \wedge g(x) < 0\}.$$

Ako je $g(x) \geq 0$, tada smijemo nejednadžbu spepenovati sa $2n$, jer su joj obje strane nenegativne, pa dobijamo $f(x) > [g(x)]^{2n}$. Uočimo da je uvjet DP u ovom slučaju automatski ispunjen, budući da je $f(x) > [g(x)]^{2n} \geq 0$, za sve realne vrijednosti nepoznanice x . Prema tome, u ovom slučaju skup rješenja R_2 nejednadžbe je predstavljen skupom

$$R_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) > [g(x)]^{2n} \wedge g(x) \geq 0 \right\}.$$

Na taj način dobijamo skup rješenja R nejednadžbe kao $R = R_1 \cup R_2$, a što se može iskazati i sljedećim teoremom.

Teorem 3.6. *Za nejednadžbu oblika*

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

vrijedi

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \iff \left(\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) > [g(x)]^{2n} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \right).$$

Primjer 3.7. *Riješiti nejednadžbu $\sqrt{1-4x^2} \geq 1-3x$.*

Rješenje: Koristeći prethodni teorem imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x^2} \geq 1-3x &\iff \left(\begin{cases} 1-4x^2 \geq 0 \\ 1-3x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-4x^2 \geq (1-3x)^2 \\ 1-3x \geq 0 \end{cases} \right) \\ &\iff \left(\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{6}{13} \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \right) \\ &\iff \left(\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \vee 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \right) \iff x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

□

Primjer 3.8. *Riješiti nejednadžbu*

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$$

Rješenje: DP: $\left(x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} \geq 0 \wedge x - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geq 0 \right) \iff x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty).$

Za ove vrijednosti nepoznanice x , desna strana nejednadžbe je nenegativna, pa rješenje nejednadžbe postoji ako je lijeva strana nejednadžbe pozitivna, tj. ako je

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} > \sqrt{1 - \frac{1}{x}},$$

što je zadovoljeno za $x > 1$. Uz taj uvjet datu nejednadžbu smijemo kvadrirati pa imamo

$$x - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x - \frac{1}{x}}\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} > \left(\frac{x-1}{x} \right)^2,$$

odnosno

$$x - \frac{2}{x} + 1 - 2\frac{x-1}{x}\sqrt{x+1} > 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Sada, množenjem sa x^2 i dijeljenjem sa $x - 1$ (što je dozvoljeno za $x > 1$) dobijamo

$$(x^2 + x + 1 > 2x\sqrt{x+1} \wedge x > 1) \iff \left[(x^2 + x + 1)^2 > 4x^2(x+1) \wedge x > 1 \right],$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} & \left[x^4 + 2x^2(x+1) + (x+1)^2 > 4x^2(x+1) \wedge x > 1 \right] \\ \iff & \left[x^4 - 2x^2(x+1) + (x+1)^2 > 0 \wedge x > 1 \right] \\ \iff & \left[(x^2 - x - 1)^2 > 0 \wedge x > 1 \right] \\ \iff & \left(x > 1 \wedge x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Za posljednja dva tipa iracionalnih nejednadžbi iz (12), tj. za nejednadžbe s neparnim korijenima vrijede sljedeće tvrdnje.

Teorem 3.9. *Nejednadžba oblika*

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalentna je nejednadžbi

$$f(x) < [g(x)]^{2n+1}.$$

Nejednadžba oblika

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalentna je nejednadžbi

$$f(x) > [g(x)]^{2n+1}.$$

I ovdje moramo istaknuti da su posebno komplicirane **iracionalne nejednadžbe s parametrima**. Ilustriramo to sljedećim primjerom.

Primjer 3.10. *Diskutiarti rješenje nejednadžbe*

$$2\sqrt{x+a} > x+1$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

Rješenje: Prema Teoremu 3.6 imamo

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+a} > x+1 & \iff \left(\left\{ \begin{array}{l} x+a \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} 4(x+a) > (x+1)^2 \\ x+1 \geq 0 \end{array} \right\} \right) \\ & \iff \left(\left\{ \begin{array}{l} x \geq -a \\ x < -1 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geq -1 \end{array} \right\} \right). \end{aligned}$$

Primijetimo da u prvom nejednadžbi drugog sistema vrijedi

$$x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \iff x \in \langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a} \rangle \quad \text{za } a > 0,$$

dok za $a \leq 0$ slijedi $x \in \emptyset$. No, također, za $a \leq 0$, ni prvi sistem nema rješenja (jer je $-1 < 0 \leq -a$). To znači da data nejednadžba nema rješenja za $a \leq 0$. Zbog toga preostaje da promatramo oba sistema u slučaju $a > 0$. Kako broj $-a$ može biti ili s lijeve ili s desne strane broja -1 , imamo sljedeće slučajeve.

i) Za $0 < a \leq 1$, sistem nejednadžbi $x \geq -a \wedge x < -1$ nema rješenja, dok je

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geq -1 \end{array} \right\} \iff x \in \langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a} \rangle,$$

što i predstavlja skup rješenja R nejednadžbe za ove vrijednosti parametra a .

ii) Za $a > 1$ imamo

$$\begin{aligned} (x \geq -a \wedge x < -1) &\iff x \in [-a, -1], \\ &\vee \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 - 4a < 0 \\ x \geq -1 \end{array} \right\} &\iff x \in [-1, 1 + 2\sqrt{a}]. \end{aligned}$$

Dakle, skup rješenja nejednadžbe za $a > 1$ je:

$$R = [-a, -1) \cup [-1, 1 + 2\sqrt{a}) = [-a, 1 + 2\sqrt{a}).$$

Rezime:

- 1° Za $0 < a \leq 1$ rješenje nejednadžbe je $\langle 1 - 2\sqrt{a}, 1 + 2\sqrt{a} \rangle$.
- 2° Za $a > 1$ rješenje nejednadžbe je $[-a, 1 + 2\sqrt{a})$.
- 3° Za $a \leq 0$ data nejednadžba nema rješenja.

□

Primjer 3.11. *Diskutirati rješenja nejednadžbe*

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} < \sqrt{2a+x}. \quad (13)$$

u ovisnosti o realnom parametru a .

Rješenje: DP: $a+x \geq 0, a+x \neq 0, 2a+x \geq 0$, odnosno $x > -a, x \geq -2a$.

Kako

$$\begin{aligned} a &\geq 0 \implies -a \geq -2a, \\ a &< 0 \implies -a < -2a, \end{aligned}$$

to je

$$\text{DP: } \left\{ \begin{array}{ll} x \geq -2a & \text{za } a < 0, \\ x \geq -a & \text{za } a \geq 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

Uzimajući u obzir da je $a+x > 0$ i

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} -a & \text{za } a < 0, \\ 0 & \text{za } a = 0, \\ a & \text{za } a > 0, \end{cases}$$

imat ćemo da je

$$\sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \frac{|a|}{\sqrt{a+x}} = \begin{cases} -\frac{a}{\sqrt{a+x}} & \text{za } a < 0, \\ 0 & \text{za } a = 0, \\ \frac{a}{\sqrt{a+x}} & \text{za } a > 0. \end{cases} \quad (15)$$

Dakle, imamo tri kvalitativno različita slučaja.

1) Za $a < 0$, koristeći (15), nejednadžba (13) ekvivalentna je nejednadžbi

$$\sqrt{a+x} + \frac{a}{\sqrt{a+x}} < \sqrt{2a+x}, \quad (16)$$

odnosno,

$$\begin{aligned} (16) & \iff a+x+a < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x} \\ & \iff 2a+x < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}. \end{aligned}$$

Sada, zbog $2a+x \geq 0$, smijemo kvadrirati obje strane posljednje nejednakosti, pa je

$$\begin{aligned} (16) & \iff (2a+x)^2 < (a+x)(2a+x) \iff (2a+x)^2 - (a+x)(2a+x) < 0 \\ & \iff (2a+x)(2a+x-a-x) < 0 \iff (2a+x)a < 0 \stackrel{a < 0}{\iff} 2a+x > 0 \\ & \iff x > -2a. \end{aligned}$$

Imajući na umu (14) zaključujemo da za $a < 0$ nejednadžba (13) ima rješenje $x > -2a$, odnosno

$$R_1 = \langle -2a, +\infty \rangle \quad \text{za } a < 0.$$

2) Za $a = 0$ vrijedi

$$(13) \iff \sqrt{x} < \sqrt{x} \iff 1 < 1,$$

što nije tačno. Dakle, $R_2 = \emptyset$ za $a = 0$.

3) Za $a > 0$ nejednadžba (13) ekvivalentna je nejednadžbi

$$\sqrt{a+x} - \frac{a}{\sqrt{a+x}} < \sqrt{2a+x}.$$

odnosno

$$\begin{aligned} (16) & \iff a+x-a < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x} \\ & \iff x < \sqrt{a+x}\sqrt{2a+x}. \end{aligned} \quad (17)$$

Posljednja nejednakost je sigurno tačna za $x \leq 0$, tj. za

$$x \in R_3 = \langle -\infty, 0] \cap DP = \langle -\infty, 0] \cap \langle -a, +\infty \rangle = \langle -a, 0] .$$

S druge strane, za $x > 0$, kvadriranjem (17) dobijamo da je

$$\begin{aligned} (16) & \iff x^2 < (a+x)(2a+x) \\ & \iff 0 < a(2a+3x), \end{aligned}$$

što je uvijek tačno za $a > 0$ i $x > 0$, tj. $x \in R_4 = \langle 0, +\infty \rangle$. Dakle, u slučaju $a > 0$ rješenje je

$$R_5 = R_3 \cup R_4 = \langle -a, 0] \cup \langle 0, +\infty \rangle = \langle -a, +\infty \rangle .$$

Rezime:

- 1° Za $a < 0$ rješenje date nejednadžbe je $\langle -2a, +\infty \rangle$.
- 2° Za $a = 0$ data nejednadžba nema rješenja.
- 3° Za $a > 0$ rješenje date nejednadžbe je $x \in \langle -a, +\infty \rangle$.

□



Zadaci za samostalan rad

Riješiti sljedeće nejednadžbe:

1. a) $\sqrt{4x + 10} < 2x + 1$,

b) $\sqrt{x+7} < x+1$.

2. a) $\sqrt{2x+1} > x-1$,

b) $\sqrt{x-1} > x-3$.

3. a) $x > \sqrt{x^2 - 3x + 2},$

b) $\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14.$

4. $\sqrt{x+1} < \sqrt{2x-4}$.

5. $\sqrt{x-6} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2x-1}$.

6. $\sqrt{5x+4} + \sqrt{5x-4} > \sqrt{10x-6}$.

7. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} > 2.$

8. $\sqrt{\frac{x}{x-2}} - \sqrt{\frac{x-2}{x}} > \frac{1}{x}.$

9. $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} > \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$.

10. $\frac{1 - \sqrt{1 - 8x^2}}{2x} < 1.$

Diskutirati rješenja sljedećih nejednadžbi u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$:

11. $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{2ax - x^2} > a, \quad (a \in \mathbb{R}).$

12. $a\sqrt{x+1} < 1$.

13. $\sqrt{x-1} \geq a-x$.

14. $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} > a$.

15. $\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} < \sqrt{2}$.

Literatura

- [1] M.P. Antonov, M.J. Vigodski, V.V. Nikitin, A.I. Sankin, *Zbirka zadataka iz elementarne matematike*, Zavod za izdavanje udžbenika, Sarajevo, 1972.
- [2] V.T. Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.
- [3] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Elementarna matematika - Teorija i zadaci*, PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2009.
- [4] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Zbirka zadataka iz matematike - za pripremanje prijemnih ispita na fakultetima* (drugo izdanje), Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.
- [5] R. Živković, H. Fatkić, Z. Stupar, *Zbirka zadataka iz matematika sa rješenjima, uputama i rezultatima*, Svjetlost, Sarajevo, 1987.

Dirihleov princip i njegove primjene

Dragoljub Milošević^a

^a Republika Srbija

Sažetak: Dana je formulacija najjednostavnijeg oblika Dirihleovog principa, a potom i formulacija njegovog poopćenja. Na pogodno odabranim primjerima je razmatrana primjena Dirihleovog principa namijenjena osnovcima, a nakon toga i primjena predviđena za srednjoškolce. U posljednjem dijelu ovog rada dane su dvije skupine zadataka predviđene za učenike: a) osnovne, b) srednje škole.

1. Uvod

Pri rješavanju problema razne vrste, osobito kod dokazivanja postojanja objekata koji imaju neku određenu karakteristiku, ne rijetko je uspješna primjena jednog od najpoznatijih kombinatornih principa, koji je znan pod različitim nazivima kao „princip kutija“, „princip golubarnika“, „problem zečeva i kaveza“, itd. Njemački matematičar francuskog porijekla P. G. L. Dirichlet (1805 – 1859) je prvi jasno formulisao i dao mu precizan matematički smisao. Radi toga se taj princip naziva - Dirihleov princip.

Najprije navodimo nekoliko formulacija najjednostavnijeg oblika Dirihleovog principa:

- (1) ako je $n + 1$ zečeva smješteno u n kaveza, onda se bar u jednom kavezu nalaze bar 2 zeca;
- (2) ako je $n + 1$ predmeta raspoređeno u n praznih kutija, onda postoji bar jedna kutija koja sadrži bar 2 predmeta;
- (3) ako konačan skup S sa $n + 1$ elemenata razdijelimo u najviše n disjunktih podskupova S_1, S_2, \dots, S_m , ($m \leq n$), onda postoji podskup S_k s najmanje 2 elementa;
- (4) za bilo koje preslikavanje $f : A \rightarrow B$ konačnog skupa A sa $n + 1$ elemenata u konačni skup B sa n elemenata postoje 2 elementa skupa A koji imaju istu sliku.

Dokaz samog principa je jednostavan, i svodi se na trivijalno zbrajanje zečeva (predmeta) u kavezima (kutijama). Naime, ako bi u svakom kavezu bio smješten najviše jedan zec, onda ukupan broj zečeva u kavezima ne bi bio veći od n .

Napomena 1: Uočimo da tvrdnja naročito vrijedi ako je broj zečeva, predmeta, odnosno elemenata skupa veći od $n + 1$.

Dirihle je svoj princip upotrebljavao u teoriji brojeva. Međutim, Dirihleov princip je primjenljiv i u mnogim drugim oblastima matematike (algebra, geometrija, ...).

Iako je tvrdnja iskazana u Dirihleovom principu jedan od najjednostavnijih principa kombinatorike, ako se vješto upotrijebi može biti veoma efikasan. Vještina je da se u konkretnom zadatku izvrši raščlanjavanje i pravilno odabere šta će biti „zečevi“ („predmeti“), a šta „kavezi“ („kutije“). Zadaci u kojima se traži

dokaz egzistencije nekog objekta su često zadaci koji se mogu riješiti korištenjem Dirihleovog principa, pa su zadaci tipa „dokaži da postoji...“ prikladni za pokušaj primjene tog principa. Često se takvi zadaci umjesto Dirihleovim principom rješavaju tako što se pođe od hipoteze da tvrdnja ne vrijedi, pa se dođe do kontradikcije (na taj način se dokazuje i Dirihleov princip).

2. Dirihleov princip u osnovnoj školi

Na pogodno odabranim primjerima ukazat ćemo na primjenu Dirihleovog principa koja je namijenjena učenicima osnovne škole.

Primjer 2.1. *Možemo li utvrditi da u skupini od 32 učenika postoje bar dva učenika čija prezimena počinju istim slovom?*

Rješenje: Jednostavno se uočava da treba povezati učenike i slova abecede. Ovdje „zečeve“ predstavljaju učenici (ima ih 32), a „kaveze“ slova (ima ih 30). U najnepovoljnijem slučaju, prvih 30 učenika za početna slova svojih prezimena „zauzeli“ bi svih 30 slova, pa prezimena preostala 2 učenika moraju počinjati nekim od „zauzetih“ slova. Dakle, u toj skupini učenika sigurno postoje učenici (bar dva) čija prezimena počinju istim slovom. \square

Primjer 2.2. *Koliko najmanje proizvoljno odabranih prirodnih brojeva treba da uzmemo da bi među njima postojala barem dva broja čija bi razlika bila djeljiva sa 5?*

Rješenje: Ako se neki prirodan broj podijeli sa 5, za ostatak se mora dobiti jedan od brojeva: 0, 1, 2, 3 ili 4. Radi toga, ako izaberemo pet prirodnih brojeva, u najnepovoljnijem slučaju imali bismo različite ostatke pri dijeljenju sa 5. Kažemo da je moguće da među njima ne može da se izabere par brojeva čija je razlika djeljiva sa 5. Prema tome, treba da se izabere najmanje 6 brojeva, zato što će taj šesti broj – na bazi Dirihleovog principa – imati isti ostatak kao neki od prethodno izabranih brojeva, pa će njihova razlika biti djeljiva sa 5. \square

Napomena 2: Primjer 2 se može uopćiti. Kako?

Primjer 2.3. *U šumi raste 1 000 000 breza, a na svakoj ima ne više od 900 000 listova. Dokažimo da u šumi postoje dvije breze sa istim brojem listova.*

Rješenje: Pred nama je 1 000 000 „zečeva“ – breza i samo 900 001 kavez – kavezi su u ovom slučaju brojevi od 0 do 900 000. Svaki „zec“ – breza smješta se u kavez sa brojem koji je jednak broju listova na toj brezi. S obzirom na to da je „zečeva“ znatno više nego „kaveza“, u nekom „kavezu“ bit će dva „zeca“. Međutim, ako su dva „zeca“ u istom kavezu, onda oni imaju isti broj listova. \square

Primjer 2.4. *Četiri prijatelja odlučila su jedne nedelje poći u 5 bioskopa (kina) svojega grada, u kojima predstave počinju u 9, 11, 13, 15, 17, 19 i 21 sat. Na svaku predstavu dva prijatelja išla su u jedan bioskop, druga dvojica u drugi bioskop. Kasno navečer pokazalo se da je svaki od njih bio u 5 bioskopa. Dokažimo da u svakom od 5 bioskopa bar na jednoj predstavi toga dana nije bio niko od prijatelja.*

Rješenje: Prijatelji su bili na ukupno $2 \cdot 7 = 14$ predstava. Da su u jednom bioskopu bili na svih 7 predstava, u ostala 4 bioskopa bili bi na ukupno 7 predstava, a to znači da bi bar u jednom bioskopu bila samo jedna grupa (Dirihle !). Neko od prijatelja ne bi bio u tome bioskopu ni na jednoj predstavi, što je suprotno činjenicama. Prema tome, polazna hipoteza je netačna. Ovim je dokaz okončan. \square

Primjer 2.5. *U jednoj prodavnici se našlo petoro ljudi. Dokažimo da među njima postoje bar dvojica koji imaju isti broj poznanika među ostalim ljudima (svaki od njih među ostalom četvoricom).*

Rješenje: Promatrajmo pet soba i na njihovim vratima napišimo brojeve 0, 1, 2, 3, 4. Stavimo petoro ljudi iz prodavnice u te sobe i to tako da je broj na vratima sobe jednak broju poznanika čovjeka koji se nalazi u toj sobi. Moguća su dva slučaja: ili postoji čovjek koji ne poznaje nikoga od ostale četvorice, ili takav ne postoji. Ako takav čovjek postoji, onda u sobi 4 nema nikoga (inače bi se taj čovjek i onaj iz sobe 4 poznavali, jer bi posljednji imao četiri poznanika), U drugom slučaju, u sobi sa brojem 0 nema nikoga. Prema tome, u oba slučaja imamo istu situaciju: u četiri sobe je smješteno petoro ljudi pa, prema Dirihleovom principu, u jednoj od soba se nalaze dvije osobe. Njih dvije onda imaju isti broj poznanika (jednak broju sobe). \square

Primjer 2.6. Na list papira oblika pravougaonika $21 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$. Nespretnjaković je prolio tuš tako da je ukupna površina svih mrlja jednaka $100\pi \text{ cm}^2$. Dokažimo da postoje dvije tačke u čistom dijelu pravougaonika koje su simetrične u odnosu na jednu osu simetrije pravougaonika.

Rješenje: Preslikajmo sve mrlje simetrično u odnosu na jednu osu simetrije pravougaonika. Površina zamrljanog dijela će se povećati, ali neće biti veća od $2 \cdot 100\pi \text{ cm}^2 < 628,32 \text{ cm}^2$. Budući da je površina pravougaonika jednaka 630 cm^2 , to će uvijek ostati bar $1,68 \text{ cm}^2$ čiste površine. Ona je simetrična u odnosu na promatranu osu simetrije, pa u njoj postoje dvije tačke koje su simetrične u odnosu na tu osu simetrije. \square

U rješavanju nekih zadataka nam mnogo ne pomaže Dirihleov princip u navedenoj formulaciji. Zato ćemo primijeniti poopćeni Dirihleov princip, koji glasi: Ako je $nk + 1$ zečeva smješteno u n kaveza, onda je u nekom kavezu smješteno bar $k + 1$ zečeva. Ovaj uopćeni Dirihleov princip lahko dokazujemo, po analogiji sa dokazom „običnog“ (naprijed formulisanog) Dirihleovog principa.

Napomena 3: U većini netrivialnih zadataka primjenjuje se upravo uopćeni Dirihleov princip. *Napomena 4:* Tvrdnja naročito vrijedi ako je broj zečeva veći od $nk + 1$.

Primjer 2.7. U razredu ima 27 učenika. Dokaži da postoji mjesec u godini u kojem rođendan slave najmanje 3 učenika tog razreda.

Rješenje: Ovdje imamo 27 „zečeva“ (učenici) i 12 „kaveza“ (mjeseci). Kako je $27 > 25 = 12 \cdot 2 + 1$, to na temelju uopćenog Dirihleovog principa direktno slijedi da postoji mjesec u kojem rođendan slave najmanje 3 učenika. Staviše uočavamo da se već u razredu sa 25 učenika mogu naći 3 učenika koji rođendan slave u istom mjesecu. \square

Primjer 2.8. Deset učenika riješili su ukupno 35 zadataka. Poznato je da među njima ima onih koji su riješili tačno jedan zadatak, onih koji su riješili tačno dva zadatka i onih koji su riješili tačno tri zadatka. Dokažimo da postoji učenik koji je riješio bar 5 zadataka.

Rješenje: Uočimo jednog učenika koji je riješio tačno jedan zadatak, jednog koji je riješio tačno dva zadatka i jednog koji je riješio tačno tri zadatka. Zaključujemo da su preostalih 7 učenika ukupno riješili bar $35 - (1 + 2 + 3) = 29$ zadataka. Kako je $29 = 4 \cdot 7 + 1$, postoji učenik koji je riješio bar 5 zadataka (Dirihle!). \square

Primjer 2.9. Na prozoru oblika kvadrata duljine stranice $2m$ nalazi se 51 komarac. Može li Zaim metlicom oblika kruga polumjera $\frac{1}{7}m$, jednim udarcem ubiti 3 komarca?

Rješenje: Ovdje su „predmeti“ očito tačke, ima ih 51, a „kutije“ dijelovi kvadrata čiji broj tek treba odrediti. Kako je broj „kritičnih“ tačaka jednak $k + 1 = 3$ i da se broj 51 može prikazati kao $25 \cdot 2 + 1$, zaključujemo da je $k = 2$ i $n = 25$. To, pak, znači da zadani kvadrat (prozor) treba razdijeliti na 25 dijelova, podudarnih kvadratića duljine stranice $\frac{1}{5}m$ (Nacrtaj odgovarajući crtež!). Saglasno Dirihleovom principu bar u jednom od tih kvadratića nalaze se bar 3 tačke (komarca). Još nam preostaje da dokažemo da polumjer r_1 kruga opisanog oko tog kvadratića nije veći od $\frac{1}{7}m$. Dijagonala d_1 kvadratića stranice duljine $a_1 = \frac{1}{5}m$ je $d_1 = a_1\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{2}m$ (Pitagorina teorema!), a polumjer kruga opisanog oko kvadratića je $r_1 = \frac{1}{2}d_1 = \frac{\sqrt{2}}{10}m = \sqrt{\frac{1}{50}}m < \sqrt{\frac{1}{49}}m = \frac{1}{7}m$. \square

3. Dirihleov princip u srednjoj školi

Sada ćemo ukazati na nekoliko primjera primjene Dirihleovog principa namijenjenog učenicima srednje škole.

Primjer 3.1. Na takmičenju (natjecanju) iz matematike svaki od 5 postavljenih zadataka boduje se sa 0, 1, 2, 3, 4 ili 5 poena. Koliko najmanje takmičara treba da sudjeluje na natjecanju da bi među njima postojala dva koji su na svakom zadatku osvojili jednak broj poena?

Rješenje: Rezultat pojedinog učenika je niz a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , gdje je a_i broj poena koji je učenik osvojio na i -tom zadatku. Kako je a_i broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, to je broj različitih rezultata (po principu proizvoda) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$. Na temelju Dirihleovog principa, najmanji broj takmičara koji garantuje da postoji dva takmičara sa istim brojem poena na svakom zadatku je 7777. \square

Primjer 3.2. U državi Liliputanaca broj stanovnika ne premašuje 24 000 000, a u njoj postoji bar 7 000 naselja. Dokažimo da postoje dva naselja sa jednakim brojem stanovnika.

Rješenje: Ako ne bi postojala dva naselja sa jednakim brojem stanovnika, broj stanovnika ne bi bio manji od $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 7000 = \frac{1}{2}(7000 \cdot 7001) = 24,5035 \cdot 10^6 > 24 \cdot 10^6$, što je kontradikcija. \square

Primjer 3.3. Dokažimo da se od 12 prirodnih brojeva mogu izabrati dva broja tako da je njihov zbir (zbir) ili razlika (diferencija) djeljiva sa 20.

Rješenje: Ukoliko među ovih 12 brojeva postoje dva koji daju iste ostatke pri dijeljenju sa 20, tvrdnja je dokazana (jer je razlika ta dva broja djeljiva sa 20). Pretpostavimo da svi brojevi daju različite ostatke pri dijeljenju sa 20. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da tih 12 brojeva pripada skupu $\{0, 1, 2, \dots, 19\}$. Podijelimo taj skup na skupove $\{1, 19\}$, $\{2, 18\}$, $\{3, 17\}$, $\{4, 16\}$, \dots , $\{9, 11\}$, $\{0\}$ i $\{10\}$. Prema Dirihleovom principu, postoje dva broja od ovih 12 koji se nalaze u istom skupu. Zbir ta dva broja je 20, pa je ovim tvrdnja dokazana u cjelosti. \square

Primjer 3.4. Iz skupa $\{1, 2, \dots, 2n\}$ izabrano je $n + 1$ brojeva. Dokažimo da se među njima mogu naći 2 takva da:

- (a) jedan dijeli drugi,
- (b) su uzajamno prosti,
- (c) njihov zbir je $2n$ ili je izabran broj n .

Rješenje: (a) Svaki prirodni broj m se na jedinstven način može zapisati u obliku $m = 2^\alpha(2k - 1)$, gdje je $\alpha \geq 0$ i $k \geq 1$. Razdijelimo zadani skup na podskupove $A_1, A_3, A_5, \dots, A_{2n-1}$ tako da element m pripada skupu A_{2i-1} ako je $2i-1$ najveći neparni djelilac broja m . Od izabranih $n + 1$ brojeva, prema Dirihleovom principu bar 2 se moraju naći u istom podskupu A_{2k-1} . To su dva broja $2^\alpha(2k - 1)$ i $2^\beta(2k - 1)$. Ne gubeći općenitost, neka je $\beta \geq \alpha$. Tada očito $2^\beta(2k - 1)$ dijeli $2^\alpha(2k - 1)$ i tvrdnja je dokazana.

(b) Razdijelimo zadani skup na podskupove $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, \dots , $\{2n-1, 2n\}$. Prema Dirihleovom principu od $n + 1$ brojeva, bar 2 će biti iz istog podskupa, tj. bit će uzastopni brojevi. Dva uzastopna broja su uvijek uzajamno prosta, pa je i ovaj dio tvrdnje dokazan.

(c) Razdijelimo zadani skup na podskupove $\{1, 2n-1\}$, $\{2, 2n-2\}$, \dots , $\{n-1, n+1\}$ i $\{n, 2n\}$. Prema Dirihleovom principu od $n + 1$ brojeva, bar 2 će biti iz istog podskupa. Ukoliko je taj podskup $\{n, 2n\}$ broj n ispunjava uvjet zadatka. Ukoliko su iz nekog od preostalih podskupova, zbir ta dva broja je $2n$. Ovim smo dokazali tvrdnju. \square

Primjer 3.5. Dokažimo da se između bilo kojih 10 dvocifrenih brojeva mogu izabrati dve disjunktne podgrupe tako da je zbir elemenata u jednoj podgrupi jednak zbiru elemenata u drugoj podgrupi.

Rješenje: Od zadanih 10 brojeva se može načiniti $2^{10}-1 = 1023$ nepraznih podskupova (nije teško dokazati). Najveći mogući zbir jednog podskupa je $90 + 91 + \dots + 99 = 945$. Po Dirihleovom principu postoje bar dva podskupa koji imaju isti zbir. Ako ta dva podskupa nisu disjunktne, odbacimo im zajedničke elemente i dobit ćemo željene podskupove. \square

Primjer 3.6. Ako je zadana tačka P na nekoj, naprimjer dijagonali $A_i A_j$ konveksnog mnogougla $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n-1} A_{2n}$, onda prave $A_i P$ i $A_j P$ nemaju zajedničkih unutarnjih tačaka.

Rješenje: Ako tačka P ne pripada niti jednoj dijagonali, promatrajmo dijagonalu $A_1 A_{n+1}$ koja zadani $2n$ -tougao dijeli tako da se i sa jedne i sa druge strane uočene dijagonale nalazi po $n-1$ tjeme (vrh) $2n$ -tougao (Nacrtaj odgovarajući crtež!). Neka je tačka P unutar mnogougla $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$. U tom slučaju prave $PA_{n+1} PA_{n+2} \dots PA_{2n} PA_1$ ne sijeku stranice $A_{n+1} A_{n+2} \dots A_{2n} A_1$, dakle n stranica, što znači da mogu sijeći najviše n preostalih stranica. Analogno prave $PA_2 PA_3 \dots PA_n$, dakle $n-1$ prava, može sijeći najviše $n-1$ stranicu. Budući da imamo $2n$ stranica i najviše $n+n-1 = 2n-1$ presjeka, zaključujemo da postoji bar jedna stranica koju ne presijeca niti jedna prava. \square

Primjer 3.7. U staklenoj kocki ivice 1 metar nalazi se 2019 muha. Dokažimo da postoji sfera radijusa $\frac{1}{11}$ m unutar koje se u svakom momentu, neovisno od rasporeda muha, nalaze barem 3 muhe.

Rješenje: S obzirom da ima 2019 muha i 1000 kubnih decimetara, te kako je $2019 : 1000 = 2$ sa ostatkom 19, zaključujemo da postoji kubni decimetar unutar koga se nalaze bar $2 + 1 = 3$ muhe. Preostaje da se dokaže da se oko kubnog decimetra može opisati sfera radijusa $\frac{1}{11}$ m = $\frac{10}{11}$ dm. Dokaz slijedi direktno iz činjenice da je dijametar sfere ($2 \cdot \frac{10}{11}$ dm = 1,818... dm) veći od dijagonale kubnog decimetra ($\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$ dm = $\sqrt{3}$ dm = 1,732... dm). \square

Primjer 3.8. U dvije jednake kutije je smješteno ukupno 65 zelenih, crvenih, žutih i plavih loptica. Pored toga što su različitih boja, one se razlikuju i po veličini. Među pet izvučenih loptica iste boje iz jedne kutije, bar dvije su iste veličine. Dokažimo da postoje bar tri loptice koje se nalaze u istoj kutiji i koje su iste boje i veličine.

Rješenje: Kako imamo 65 loptica, na osnovu Dirihleovog principa, u jednoj kutiji imamo sigurno 33 loptice. Nadalje, budući da loptice mogu biti zelene, crvene, žute ili plave, to znači da u kutiji koja ima 33 loptice bar 9 loptica mogu biti iste boje ($33 = 8 + 8 + 8 + 9$). Pošto su od pet loptica iste boje izvučenih iz iste kutije bar dvije iste veličine, zaključujemo da najviše mogu biti četiri različite veličine za istu boju ($5 = 1 + 1 + 1 + 2$). Prema tome, u kutiji u kojoj se nalazi 9 loptica iste boje, bar 3 su iste veličine ($9 = 2 + 2 + 2 + 3$). \square

Primjer 3.9. Neka je A skup članova aritmetičkog niza (progresije) 1, 4, 7, ..., 100. Dokažimo da, bez obzira na to kojih 19 brojeva izaberemo iz skupa A , postoji sigurno par brojeva čiji je zbir 104.

Rješenje: Uređeni parovi brojeva koji pripadaju zadanom aritmetičkom nizu, a čiji je zbir 104 su: (4, 100), (7, 97), ..., (49, 55). Dakle postoji 16 uređenih parova. Brojevi 1 i 52 su elementi skupa A , ali ne ulaze u sastav navedenih parova. Ne računajući ova dva broja, dakle od $19 - 2 = 17$ brojeva biramo dva. Sada na temelju Dirihleovog principa, od 17 brojeva koliko biramo, moramo izabrati dva broja koji pripadaju istom uređenom paru, odnosno čiji je zbir 104. \square

Iskažimo Dirihleov princip u drugačijoj formi: Ako je m kuglica raspoređeno u n kutija, tada bar jedna kutija sadrži bar $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ kuglica.

Napomena 5: Sa $\lfloor x \rfloor$ je obilježen cijeli dio realnog broja x , tj. najveći cio broj koji nije veći od broja x . Naprimjer, $\lfloor 3,28 \rfloor = 3$, $\lfloor -3,28 \rfloor = -4$. Lahko se uočava da je $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Dokaz: U slučaju da imamo tačno $n \cdot \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ kuglica, tada možemo kuglice rasporediti u n kutija tako da se u svakoj kutiji nađe po $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ kuglica. Kako je $n \cdot \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n \cdot \frac{m-1}{n} = m-1 = m$ zaključujemo da u nekoj kutiji mora da se nađe više od $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ kuglica. \square

Primjer 3.10. *Dokažimo da u grupi od 2600 osoba bar 8 osoba slavi rođendan istog dana.*

Rješenje: Najprije rasporedimo te osobe u „kutije“ po danu rođenja, tj. „kutije“ su dani u godini od 1. januara do 31. decembra (skupa 366 „kutija“, ako uključimo 29. februar). Na temelju Dirihleovog principa bar jedna „kutija“ sadrži bar $\left\lfloor \frac{2600-1}{366} \right\rfloor + 1 = 7 + 1 = 8$ „predmeta“, odnosno bar 8 osoba slavi rođendan istog dana. \square

4. Zadaci za vježbanje

Za osnovnu školu

1. Postoji li među 2020 proizvoljno odabranih prirodnih brojeva dva čija je razlika djeljiva sa 2019?
2. Dokaži da u školi sa 733 učenika najmanje 3 učenika imaju rođendan istog dana.
3. Imamo 55 sanduka jabuka od 3 sorte (u svakom sanduku su jabuke iste sorte). Da li među njima postoji 19 sanduka jabuka iste sorte?
4. U kvadrat stranice 8 cm na proizvoljan način je razmešteno 200 tačaka. Dokaži da se može konstruisati kvadrat površine kvadratnog centimetra unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane tačke.
5. Svaka od stranica i dijagonala šestougla obojena je crvenom ili zelenom bojom. Da li se proizvoljnim bojenjem uvijek može dobiti trougao čija su tjemena ujedno i tjemena šestougla i čije su sve stranice iste boje?
6. U jednakokraničnom trouglu ABC , stranice 3 cm, na slučajan način je raspoređeno 10 tačaka. Dokaži da pri svakom rasporedu tačaka postoje barem dvije tačke čije je rastojanje manje od 1 cm.
7. Na kružnici je označeno 16 tačaka koje su tjemena jednog pravilnog 20-ougla, među kojima je 9 plavih i 7 zelenih. Dokaži da su neke dvije plave tačke krajevi jednog prečnika.
8. Zaim je napisao na tabli niz od 100 prirodnih brojeva čiji je zbir 198. Da li u tom nizu postoji jedan ili više uzastopnih članova čiji je zbir 99?
9. Sto osoba sjedi za okruglim stolom, pri čemu su više od polovine muškarci. Dokaži da neka dva muškarca sjede: a) jedan pored drugog, b) jedan nasuprot drugoga.
10. Bela ravan je na proizvoljan način poprskana zelenom bojom. Dokaži da u toj ravni postoje dvije tačke iste boje čije je rastojanje 1 cm.
11. Unutar pravougaonika, čije su stranice 3 i 4, zadano je 6 tačaka. Dokaži da u toj skupini tačaka postoje dvije na rastojanju ne većem od $\sqrt{5}$.
12. U kvadrat stranice 1 na proizvoljan način je smještena 51 tačka. Dokaži da među tim tačkama postoje barem tri koje se mogu prekriti krugom radijusa $\frac{1}{7}$.
13. U kocki ivice 13 cm izabrano je 2019 tačaka. Može li se u tu kocku smjestiti jedna kocka ivice 1 cm, tako da unutar nje ne bude nijedna od izabranih tačaka?
14. U prodavnicu su dovezli 28 gajbi sa tri različite sorte krušaka (u svakoj gajbi su kruške iste sorte). Dokaži da se u nekih 10 gajbi nalaze kruške iste sorte.
15. U svako polje tablice 10×10 upisan je jedan cio broj. Razlika dva broja u susjednim poljima (poljima koja imaju zajedničku ivicu) nije veća od 5. Dokaži da se u tablici mogu naći dva jednaka broja.
16. Na kružnici s centrom O zadano je 15 tačaka koje su vrhovi jednog pravilnog 15-ougla. Nekih 6 tačaka je obojeno zeleno. Dokaži da postoje dvije zelene tačke A i B takve da je $\angle AOB = 120^\circ$.

Za srednju školu

1. Zadana su 52 proizvoljna prirodna broja. Dokaži da među njima postoje dva čiji zbir ili razlika je djeljiva sa 100. Vrijedi li ta tvrdnja za 51 broj?
2. Da li postoji prirodan broj koji počinje ciframa 9876543210, a djeljiv je sa 2019?
3. Dokaži da postoji prirodni broj n tako da se decimalni zapis broja 3^n završava sa 0001.
4. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji broj oblika $11 \dots 100 \dots 0$ koji je djeljiv sa n .
5. Dokaži da je između 100 proizvoljnih cijelih brojeva uvijek moguće izabrati 15 takvih da je razlika bilo koja dva od njih djeljiva sa 7.
6. Dokaži da među $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu izabrati tri takva broja da jedan od njih bude jednak zbiru ostala dva.
7. Zadano je n cijelih brojeva a_1, a_2, \dots, a_n . Dokaži da se može odabrati nekoliko od njih čiji je zbir kvadrata djeljiv sa n .
8. Čvorovi beskonačne kvadratne mreže obojeni su plavom i zelenom bojom. Dokaži da postoje dvije horizontalne i dvije vertikalne linije koje grade u kvadratnoj mreži pravougaonik čija su sva tjemena iste boje.
9. Dokaži da svaki konveksni 21-ougao ima dvije dijagonale koje zaklapaju ugao ne veći od 1° .
10. Unutar kvadrata duljine stranice 15 raspoređeno je 20 kvadrata duljine stranice 1. Dokaži da se unutar zadanog „velikog“ kvadrata može smjestiti krug radijusa 1, koji nema zajedničkih tačaka ni sa jednim od jediničnih kvadrata.
11. Na okruglom stolu radijusa 25 se nalazi manje od 144 okruglih novčića radijusa 1. Dokaži da se na sto može postaviti bar još jedan novčić, tako da on ne pokriva ni djelomično nijedan od prethodnih novčića.
12. Unutar kvadrata stranice duljine 1 cm nalazi se konveksni mnogougao sa 100 stranica. Dokaži da postoji trougao, čija su tjemena – tjemena zadanog mnogougla i čija je površina manja od $0,0008 cm^2$.
13. Svaka od 9 pravih dijeli kvadrat na dva četverougla čije su površine u razmjeri 2 : 3. Dokaži da postoje 3 od tih 9 pravih koje se sijeku u jednoj tački.
14. Soba ima oblik kocke duljine ivice (brida) 3 m . U njoj zuji 36 muha. Dokaži da se u svakom trenutku bar 6 muha može obuhvatiti sferom polumjera 9 dm .
15. Dokaži da ma kako smjestili 10 tačaka u krug dijametara 5 dm , među njima se mogu naći dvije na rastojanju manjem od 2 dm .
16. Dokaži da za svaki iracionalni broj x i svaki prirodni broj n postoji racionalni broj $\frac{p}{q}$, ($1 \leq q \leq n$), tako da vrijedi nejednakost $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$.

Literatura

- [1] Z. Kurnik: *Neke posebne metode rješavanja matematičkih problema*, (iz Biltene seminara iz matematike za nastavnike - mentore, str. 3 - 9), Hrvatsko matematičko društvo, 1991.
- [2] B. Marinković, *Dirihleov princip*, *Arhimedes*, Beograd, 1985.
- [3] P. Mladenović, *Kombinatorika* (5. izdanje), Društvo matematičara, Beograd, 2013.
- [4] A.I. Orlov, *Princip Dirihle*, *Kvant* 7(1971), 17 – 21.
- [5] R. Tošić, *Rešeni zadaci iz matematike - za mlade matematičare*, Naučna knjiga, Beograd, 1986.
- [6] Časopisi *Matematičko- fizički list* (Zagreb) i *Tangenta* (Beograd), godište 2011/12 i nadalje.

2

KUTAK ZA ZADATKE

Zabavna matematika

Zadatak 1. *Ponedjeljkom, utorkom i srijedom Bekir uvijek laže, a ostalim danima govori samo istinu. Utvrditi kojim danima u toku sedmice je Bekir mogao reći sljedeće tvrdnje.*

1. *Juče sam lagao.*
2. *Sutra ću lagati.*
3. *Lagao sam juče, a lagat ću i sutra.*
4. *Nazovi me za deset dana pa ću ti reći istinu.*

Zadatak 2. *Matematičari uvijek govore istinu, a fizičari uvijek lažu. Osobe F i G su matematičari. A izjavljuje da B tvrdi da je C uvjeren da D govori da E ostaje pri tome da F tvrdi da G nije matematičar. Ako je osoba A fizičar, koliko fizičara ima među pomenutim osobama?*

Zadatak 3. *Za okruglim stolom sjedi $2n$ ljudi od kojih je n fizičara i n hemičara. Neki od njih uvijek govore istinu, a ostali uvijek lažu. Poznato je da je broj lažova među fizičarima jednak broju lažova među hemičarima. Na pitanje "Šta je vaš susjed sa desne strane?" - svi prisutni su odgovorili: "Hemičar.". Dokazati da je n paran broj!*

Zadatak 4. *Na ostrvu Logos svaki čovjek je ili lopov (onaj koji uvijek laže) ili vitez (onaj koji uvijek govori istinu). Svaki stanovnik tog ostrva izjavio je dvije iste rečenice:*

- *"Svi moji poznanici poznaju se međusobno."*
- *"Među mojim poznanicima ima lopova bar onoliko koliko ima vitezova."*

Pokazati da na ostrvu živi bar toliko vitezova koliko ima lopova.

Zadatak 5. *Osobe A , B i C osumnjičene su za pljačku banke. Osobe A i C su blizanci i toliko slični da ih niko ne može razlikovati. U policijskoj kartoteci nalaze se dosijei osumnjičenih, u kojima se nalaze podaci o njihovim karakteristikama, sklonostima i navikama. Poznato je da ni jedan od blizanaca ne ide u akciju bez bar jednog saučesnika. Osoba B uvijek ide u akciju sam. Pored toga policija ima saznanje da je u vrijeme pljačke jedan od blizanaca bio u restoranu Zlatnik, ali nije bilo moguće utvrditi koji od blizanaca. Pod pretpostavkom da niko drugi osim pomenute tri osobe nije mogao biti umješan u ovu pljačku, utvrditi ko je od njih kriv, a ko nevin.*

Zadatak 6. *Za jedno nedjeljo optužene su četiri osobe, A , B , C i D . Sud raspolaže sa sljedećim činjenicama:*

1. *Ako su A i B krivi, onda je C bio saučesnik.*
2. *Ako je A kriv, onda je bar jedan od optuženih B i C bio saučesnik.*
3. *Ako je C kriv, onda je D bio saučesnik.*
4. *Ako A nije kriv, onda je D kriv.*

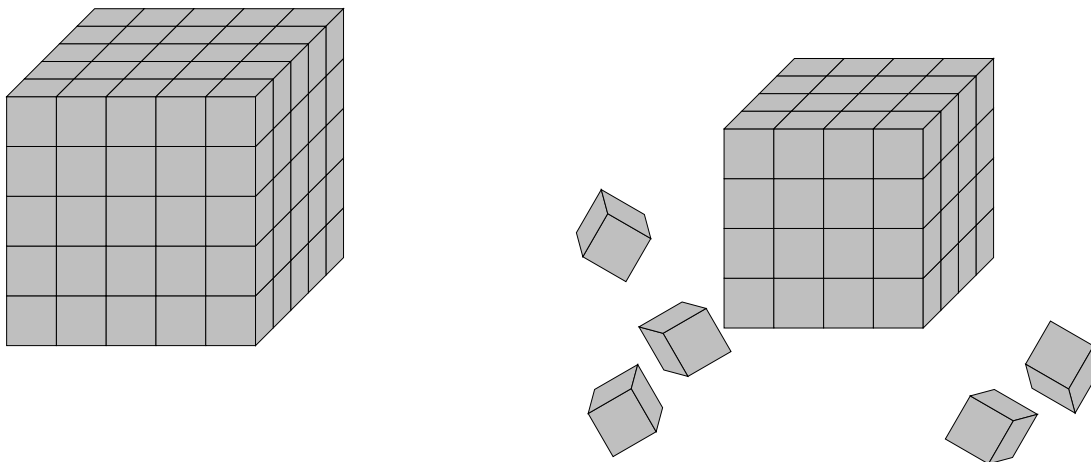
Ko je od optuženih nepobitno kriv, a čija je krivica pod znakom pitanja.

Nagradni zadatak: Problem sječenja

LASER (**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) je optički izvor koji emituje fotone u uređenom mlazu. Laserska zraka je obično skoro jednobojna, to jest sadrži jednu valnu dužinu ili nijansu. Prvi upotrebljiv optički laser je napravio Theodore H. Maiman 1960 godine. U današnje vrijeme koriste se u raznim oblastima kao što su elektronika i komunikacije, u astronomiji, nauci, medicini, vojnoj industriji, saobraćajnoj sigurnosti. Jednu od primjena ima i u sječenju materijala, precizno rezanje bez strugotina uz maksimalnu uštedu materijala.

Zadatak 1. *Kocku stranice 5 cm siječemo laserom na manje dijelove. Manji dijelovi opet moraju biti kocke sa cjelobrojnom dužinom stranice (npr. kocka $3 \times 3 \times 3$). Kako je kocka stranice 5 cm, možemo naprimjer isjeći 125 malih kocki stranica 1 cm i to očigledno predstavlja najveći mogući broj novodobijenih dijelova. Kako isjeći datu kocku, a da dobijenih manjih kocki bude najmanji mogući broj? Taj broj je:*

1. 27
2. 36
3. 48
4. 50
5. 62
6. 64
7. 84
8. 92
9. 100
10. 125 .



Za nagradni zadatak iz prethodnog broja EVOLVENTE nismo dobili niti jedno rješenje, tako da i taj zadatak još uvijek vrijedi kao nagradni.

Ciljna skupina: svi uzrasti

Rješenje zadatka dostaviti najkasnije do 15.04.2020. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom)

Prvo pristiglo, tačno i potpuno rješenje bit će nagrađeno prigodnom nagradom

Konkursni zadaci

Osnovna škola

Zadatak 21 (*). *Neka je*

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 6, 8\}, \quad A \setminus B = \{2, 6\} \quad \text{i} \quad B \setminus A = \{0, 8\}.$$

Odrediti $A \cap B$.

Zadatak 22 (*). *Koliko brojeva sadrži niz: 3, 8, 13, 18, ..., 118, 123.*

Zadatak 23. *Učenici koji na svojim majicama nose brojeve 1, 2, 3, 4 osvojili su na krosu prva četiri mjesta. Odrediti redoslijed učenika na cilju ako se zna:*

- a) brojevi mjesta koje su učenici osvojili na krosu ne poklapaju se s brojevima koje učenici nose na majicama;*
- b) učenik s brojem 3 na majici nije osvojio prvo mjesto;*
- c) broj na majici učenika koji je osvojio četvrto mjesto poklapa se s brojem mjesta koji je osvojio onaj učenik, čiji je broj na majici ujedno broj mjesta koji je osvojio učenik s brojem 2 na majici.*

Zadatak 24. *Debljina jednog lista hartije iznosi jednu četvrtinu mm. Ako se taj list savije napola i tako se nastavi s presavijanjem prethodno dobivenog uvijek napola, kolika će biti debljina ako se izvrši 12 presavijanja?*

Zadatak 25. *Dati su razlomci $\frac{35}{396}$ i $\frac{28}{297}$. Naći najmanji broj takav da količnik tog broja sa svakim od datih razlomaka bude prirodan broj.*

Zadatak 26. *Visine trougla $\triangle ABC$ sijeku se u tački M . Ako je $|AM| = |BC|$, izračunati veličinu unutarnjeg ugla trougla kod tjemena A .*

Zadatak 27. *Dat je kvadrat $ABCD$ čija je stranica dužine 1. Nad stranicom AB kao nad prečnikom konstruiran je polukrug. Iz tačke D povučena je tangenta na polukrug koja stranicu BC siječe u tački E . Odrediti obim i površinu trougla $\triangle DCE$.*

Zadatak 28. *Broj a je kvadrat prirodnog broja. Dokazati da je a ili djeljiv s 4 ili pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1.*

Zadatak 29. *9. Dokazati da za pozitivne brojeve x i y vrijedi nejednakost*

$$(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8xy.$$

Kada vrijedi jednakost?

Zadatak 30. *Izračunati:*
$$\sqrt{\underbrace{1111\dots 11}_{200 \text{ jedinica}} - \underbrace{222\dots 22}_{100 \text{ dvojki}}}.$$

Ciljna skupina: Osnovna škola, srednja škola

Zadaci označeni sa (*) su primjereni za najmlađi uzrast (4. i 5. razred)

Rješenja zadataka dostaviti najkasnije do 28.02.2020. godine, putem e-maila ili na adresu časopisa (poštom ili lično)

Srednja škola

Zadatak 21. Ako su a , b i c pozitivni racionalni brojevi, dokazati da je broj

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2},$$

racionalan.

Zadatak 22. Ako su a , b i c realni brojevi takvi da je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $abc = 3$, dokazati da vrijedi

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \geq 72.$$

Zadatak 23. Neka je \overline{CD} visina pravougloug trougla $\triangle ABC$. Neka su R i S središta upisanih kružnica u pravouglumim trouglovima $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$. Ako prave CR i CS sijeku stranicu AB u tačkama P i Q , dokazati da je $|AC| = |AQ|$ i $|BC| = |BP|$.

Zadatak 24. Za koje vrijednosti promjenljivih izraz

$$A = \frac{4x^2 + 28x + 11}{9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y + 12},$$

ima najmanju vrijednost i odrediti tu vrijednost (A_{min}).

Zadatak 25. Brojevi 12 i 60 imaju interesantno svojstvo. Njihov proizvod je tačno deset puta veći od njihovog zbira. Postoje li još koji ovakvi parovi prirodnih brojeva? Ako postoje, odrediti ih.

Zadatak 26. Naći vrijednost parametra p za koga jednačina

$$x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0,$$

ima četiri realna rješenja koja obrazuju aritmetički niz.

Zadatak 27. Riješiti jednačinu

$$\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4.$$

Zadatak 28. Na stranici AB trougla $\triangle ABC$ leži tačka M tako da je $|AM| = 3|MB|$, a na stranici AC leži tačka N takva da je $2|AN| = |NC|$. Površina trougla $\triangle ABC$ je n . Izračunati površinu četvorougla $MBCN$.

Zadatak 29. Ako ya uglove trougla vrijedi jednakost

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{2},$$

tada je trougao jednakokraničan. Dokazati!

Zadatak 30. Odrediti x -ti član geometrijskog niza čija su prva tri člana

$$11 - x^{\log x}, x^{\log x} - 5, 35 - x^{\log x}.$$

Rješenja konkursnih zadataka 11 – 20

Osnovna škola

Zadatak 11 (*). U izrazu $6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 7$ zamijeniti $*$ sa $+$ ili $-$ tako da je lijeva strana jednakosti jednaka desnoj.

Rješenje: Lahko se vidi da je jedno od mogućih rješenja je $6 - 5 + 4 + 3 - 2 + 1 = 7$. Suma brojeva ispred kojih stoji $-$ treba da bude 7. \square

Delić Sumea, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 12 (*). Nana je napravila pekmez od jabuka. Pekmez je upakovala u 2 tegle od 2 litra, 3 tegle od 3 litra, 4 tegle od 4 litra i 5 tegli od 5 litara. Ove tegle želi rasporediti na dvije police tako da na svakoj polici bude jednak broj tegli i da broj litara pekmeza na obje police bude jednak.

Rješenje: Broj upotrijebljenih tegli je $2 + 3 + 4 + 5 = 14$, a broj litara je

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54.$$

Dakle, treba na obje police postaviti po 7 tegli koje zajedno sadrže 27 litara. To možemo poredati ovako:

-prva polica: jedna tegla od 2l, dvije tegle od 3l, jednu teglu od 4l i tri tegle od 5 litara;

-druga polica: jednu teglu od 2l, jednu teglu od 3l, tri tegle od 4l i dvije tegle od 5 litara. \square

Mešanović Nejra, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 13 (*). Napišite 7 susjednih prirodnih brojeva za čije pisanje je potrebno upotrijebiti 17 cifara.

Rješenje: Ako bi brojevi bili trocifreni, onda bi se za njihovo pisanje upotrijebile $7 \cdot 3 = 21$ cifre. Previše! Ako bi bili svi dvocifreni onda bi se upotrijebile 14 cifara. Premalo! Dakle, brojevi su dvocifreni i trocifreni. Ako uzmemo tri dvocifrena i četiri trocifrena onda bi upotrijebili $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 21$. Previše. Ako uzmemo četiri dvocifrena i tri trocifrena broja onda ćemo za njihovo pisanje upotrijebiti $4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 8 + 9 = 17$ cifara. To smo i tražili. Dakle, traženi brojevi su: 96, 97, 98, 99, 100, 101 i 102. \square

Hankušić Abdulah, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Zadatak 14. Pet dječaka Muharem, Predrag, Rasim, Samir i Vejsil stoje u vrsti. Poznato je da:

- Predrag i Vejsil ne stoje jedan do drugog,
- Milorad i Predrag ne stoje jedan do drugog,
- Rasim i Milorad ne stoje jedan do drugog,
- Samir i Milorad ne stoje jedan do drugog,
- Vejsil i Samir ne stoje jedan do drugog,
- Predrag stoji desno u odnosu na Milorada.

U kom poredku stoje dječaci?

Rješenje: Prema navedenim podacima do Milorada ne stoje: Predrag, Rasim i Samir. To znači da Milorad ima samo jednog susjeda i to Vejsila. Zbog toga se Milorad nalazi na početku ili na kraju reda. Iz posljednjeg uslova slijedi da je Milorad prvi (računajući slijeva). Do njega je Vejsil. Do Vejsila nisu Predrag i Samir. Dakle, desno od Vejsila je Rasim. Na preostala dva mjesta nalaze se Predrag i Samir. Kako nemamo nikakvih podataka o njihovom redosljedu, to imamo dva moguća rasporeda i to: Milorad, Vejsil, Rasim, Predrag i Samir ili Milorad, Vejsil, Rasim, Samir i Predrag. \square

Selimović Ena, 7r, OŠ "Hasan Kikić" Gračanica

Zadatak 15. Pokažite da se od brojeva $1, 2, 3, \dots, 8, 9, 10$ može sastaviti 5 razlomaka (treba upotrijebiti svih deset brojeva) tako da je suma ovih 5 razlomaka cio broj.

Rješenje:

$$\frac{9}{1} + \frac{7}{2} + \frac{6}{3} + \frac{8}{4} + \frac{5}{10} = 17.$$

\square

Osmanhodžić Medina, 7r, OŠ "Hasan Kikić" Gračanica

Zadatak 16. Na svakoj strani kocke napisan je tačno po jedan od sljedećih brojeva: 8, 9, 10, 12, 13, 19. Pri prvom bacanju kocke zbir brojeva na četiri bočne strane je bio 43, a pri drugom bacanju kocke zbir je bio 40. Odredite koji je broj napisan na stranici kocke koji je suprotan broju 19.

Rješenje: Zbir brojeva napisan na stranama kocke je

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 63.$$

Pri prvom bacanju kocke zbir brojeva na bočnim stranama je bio 43, pa je zbir brojeva na preostale dvije stranice bio $63 - 43 = 20$. Pri drugom bacanju zbir brojeva na preostale dvije stranice je bio $63 - 40 = 23$. Tako smo odredili zbireve brojeve koji su napisani na dva para naspramnih stranica. Odredimo zbir brojeva napisanih na trećem paru naspramnih stranica. Kako je zbir brojeva na sva tri para naspramnih stranica 63, to je zbir brojeva na preostalom paru stranica $63 - 23 - 20 = 20$. Vidimo da dva para naspramnih stranica imaju iste zbireve 20, a preostali par ima zbir 23. Broj 20 jedino možemo dobiti na sljedeća dva načina: $8 + 12$ i $9 + 11$. Dakle, naspram broja 8 je napisan broj 12, a naspram broja 9 je napisan broj 11. Preostala dva broja 10 i 13 su napisana jedan naspram drugog. \square

Husanović Dalila, 7r, OŠ "Hasan Kikić" Gračanica

Zadatak 17. U dvije posude raspoređeno je 60 klikera, tako da je u prvu posudu stavljeno 35, a u drugu posudu 25. Dvojica igrača, Haso i Huso, naizmjenično odabiraju jednu posudu i iz nje uzimaju koliko žele klikera. Pobjeđuje onaj igrač nakon čijeg poteza su obje posude prazne. Koji igrač pobjeđuje pri pravilnoj igri? Odgovor obrazložiti.

Rješenje: Pri pravilnoj igri prvi igrač pobjeđuje. Naime, on u svakom svom potezu treba uočiti posudu u kojoj ima više klikera i da iz nje uzme onoliko klikera kako je potrebno da u obje zdjele bude jednak broj klikera. Dakle, u prvom potezu iz prve posude uzima 10 klikera i nakon toga u obje posude će biti po 25. Drugi igrač može samo iz jedne odabrane uzeti koliko želi klikera. Tada prvi igrač, u svom drugom potezu, uzima onoliko klikera koliko je uzeo prvi, ali iz druge posude i tako dovodi do jednakosti broja klikera u obje posude. \square

Zadatak 18. Na stranici BC trougla $\triangle ABC$ izabrana je tačka F . Duž \overline{AF} siječe težišnu liniju BD u tački E tako da je $|AE| = |BC|$. Dokazati da je $|BF| = |FE|$.

Rješenje: Težišnu duž \overline{BD} produžimo preko D do tačke G tako da vrijedi $|DG| = |BD|$. Kako je $|AD| = |DC|$, to četverougao $ABCG$ ima osobinu da njegove dijagonale imaju zajedničko središte, pa je taj četverougao paralelogram. Tada je $AG \parallel BC$ i $|AG| = |BC|$. Kako je $|AE| = |BC|$, to je $|AG| = |AE|$. To znači da je trougao $\triangle AEG$ jednakokraki. Tada je $m(\angle AEG) = m(\angle AGD)$. Uglovi $\angle AEG$ i $\angle BEF$ su unakrsni, pa su podudarni.

Dakle, $m(\angle AEG) = m(\angle BEF)$ i $m(\angle AGE) = m(\angle BEF)$. Iz paralelnosti duži AG i BC slijedi podudarnost odgovarajućih naizmjeničnih uglova. Tako imamo $m(\angle AGE) = m(\angle EBF)$ i tako smo dokazali $m(\angle BEF) = m(\angle EBF)$. To znači da je trougao $\triangle BEF$ jednakokraki sa kracima BF i EF .

Zbog toga je $|BF| = |FE|$. \square

Zadatak 19. Dokazati da se svaki trougao može razrezati na tri mnogougla od kojih je jedan tupougli trougao, a da se pritom od ova tri mnogougla može složiti pravougaonik.

Rješenje: Primijetimo prvo da je površina trougla jednaka polovini proizvoda dužine njegove jedne stranice i visine na tu stranicu. Tako, naprimjer, ako je AB jedna stranica i CD visina, onda je $P = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD|$. Zbog toga ćemo pokušati trougao razrezati na tri mnogougla, od kojih je jedan tupougli trougao i koji pri novom aranžiranju daju pravougaonik sa stranicama $\frac{1}{2} |AB|$ i $|CD|$.

Neka je trougao $\triangle ABC$ raznostranični i neka je npr. $|AB| > |BC| > |CA|$. Kako naspram veće stranice trougla leži veći ugao, to je ugao $\angle ACB$ najveći ugao trougla $\triangle ABC$. Iz tjemena najvećeg unutrašnjeg ugla trougla, to jest iz tjemena C , povucimo visinu CD . Kako je $|AC| < |BC|$, to je $|DC| > |AD|$. Zbog toga na duži \overline{DB} postoji tačka E takva da je $|DE| = \frac{1}{2} |AB|$. Konstruišimo tačku F tako da je četverougao $CDEF$ paralelogram. Kako je $CD \perp DE$, to je taj paralelogram pravougaonik. Ovaj pravougaonik ima istu površinu kao i dati trougao. Dovoljno je dokazati da se on može razrezati na tri mnogougla od kojih je jedan tupougli trougao. Neka je G tačka duži \overline{CF} takva da je $|GF| = |AD|$. Kako je $|FE| = |CD|$, jer je $BDEF$ pravougaonik i $m(\angle EFG) = m(\angle CDA) = 90^\circ$, to je $\triangle EFG \cong \triangle CDA$. Nadalje, imamo

$$|CG| = |CF| - |FG| = |DE| - |AD|.$$

S druge strane je $|AB| = |AD| + |DE| + |EB|$.

Kako je $|DE| = \frac{1}{2} |AB|$, to je $|DE| = |AD| + |EB|$. Sada imamo

$$|CG| = |DE| - |AD| = (|AD| + |EB|) - |AD| = |EB|.$$

Dakle, $|EB| = |CG|$. Neka je H tačka presjeka duži BC i EG . Kao je $CG \parallel EB$, to je $m(\angle HEB) = m(\angle CGH)$ i $m(\angle EBH) = m(\angle GCH)$, jer su naizmjenični uglovi. Tada je $\triangle EBH \cong \triangle CGH$. Posmatrajmo tri mnogougla: ADC , $DEHC$ i EBH . Trougao $\triangle EBH$ je tupougli trougao. Stavljanjem trougla $\triangle ADC$ na mjesto trougla $\triangle GFE$, i trougla $\triangle ECH$ na mjesto trougla $\triangle GCH$ dobijamo pravougaonik $DEFC$.

Neka je sada trougao ABC jednakokraki i $|CA| = |CB|$. Visina na osnovicu jednakokrakog trougla je i simetrala osnovice i simetrala ugla između krakova. Neka je CD visina. Tada je $\triangle ADC \cong \triangle BDC$. Konstruišimo tačku E (kao na slici) tako da je $\triangle ACE \cong \triangle CBD$. Tada je četverougao $ADCE$ pravougaonik. Na ovaj način smo razrezali trougao $\triangle ABC$ na dva dijela i od njih napravili pravougaonik. No, od nas se traži da razrežemo trougao na tri dijela od kojih će jedan biti tupougli trougao. Da bi se to postiglo uzmimo F na AC i G na BD tako da je trougao $\triangle CFG$ tupougli. Sada mnogouglovii: $ADGF$, GCF i DCB novim grupisanjem daju pravougaonik. \square

Zadatak 20. Koliko se četverocifrenih brojeva sa različitim ciframa može obrazovati od cifara: 0, 1, 2, 4, 5, 7 tako da su djeljivi sa 4?

Rješenje: Četverocifreni broj \overline{abcd} je djeljiv sa 4 ako i samo ako je broj \overline{cd} djeljiv sa 4. Od cifara 0, 1, 2, 4, 5, 7 mogu se formirati sljedeći "dvocifreni" brojevi sa različitim ciframa koji su djeljivi sa 4: 04, 12, 20, 24, 40, 52 i 72. Dakle,

$$\overline{cd} \in \{04, 12, 20, 24, 40, 52, 72\}.$$

Odredimo sada odgovarajuće brojeve \overline{ab} . Za dvocifreni završetak 04 za cifru a imamo 4 mogućnosti, a za cifru b imamo tri mogućnosti. Dakle, u ovom slučaju imamo $4 \cdot 3 = 12$ mogućnosti.

Za dvocifreni završetak 12 za cifru a imamo samo tri mogućnosti: 4, 5 i 7. Za cifru b imamo kandidate: 0 i dvije od cifara 4, 5 i 7. Dakle, za drugu cifru imamo 3 mogućnosti, pa brojeva $\overline{ab12}$ imamo $3 \cdot 3 = 9$ mogućnosti.

Za dvocifreni završetak 20 imamo 12 mogućnosti za \overline{ab} .

Za dvocifreni završetak 24 imamo 9 mogućnosti za \overline{ab} .

Za dvocifreni završetak 40 imamo 12 mogućnosti za \overline{ab} .

Za dvocifreni završetak 52 imamo 9 mogućnosti za \overline{ab} .

Za dvocifreni završetak 72 imamo 9 mogućnosti za \overline{ab} .

Dakle, traženih četverocifrenih brojeva ima

$$12 + 9 + 12 + 9 + 12 + 9 + 9 = 72 .$$

□

Aljić Lejla, 6r, OŠ "Malešići" Malešići

Srednja škola

Zadatak 11. *Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{2019} + x^{2018} + x^{19} + x^{18} + 1$, polinomom $g(x) = x^2 - 1$.*

Rješenje: Ako je $f(x) : g(x) = n(x)$ sa ostatkom $r(x)$, tada je

$$f(x) = g(x) \cdot n(x) + r(x) .$$

Stepen polinoma $r(x)$ mora biti manji od stepena polinoma $g(x)$, pa polinom $r(x)$ zapisujemo kao $r(x) = ax + b$. Dalje, $g(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Ako je $g(x) = 0$ za neko x , tada je $f(x) = r(x)$. Imamo da je $g(x) = 0$ za $x = 1$ i $x = -1$, pa razmatrajmo dva slučaja:

1. $x = 1$

Tada je $f(1) = r(1)$, a to nam daje

$$1^{2019} + 1^{2018} + 1^{19} + 1^{18} + 1 = a \cdot 1 + b \implies a + b = 5 .$$

1. $x = -1$

Tada je $f(-1) = r(-1)$, a to nam opet daje

$$(-1)^{2019} + (-1)^{2018} + (-1)^{19} + (-1)^{18} + 1 = a \cdot (-1) + b \implies -a + b = 1 .$$

Dobili smo sistem jednačina

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ -a + b &= 1 , \end{aligned}$$

a njegovim rješavanjem dobijamo da je $a = 2$ i $b = 3$. Tada je ostatak dijeljenja zadatih polinoma dat sa $r(x) = 2x + 3$.

□

Kanita Rakovac, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 12. *U skupu \mathbb{Z} riješiti jednačinu $x^2 - y^2 = 2018$.*

Rješenje: 1.

$$x^2 - y^2 = 2018 \iff (x - y)(x + y) = 2018 .$$

1: Ako je $x - y = 1$, onda je $x + y = 2018$. Sabiranjem jednačina imamo

$$x - y + x + y = 1 + 2018 \implies 2x = 2019 .$$

Ovo je nemoguće jer je $2x$ paran broj, a 2019 je neparan broj.

2: Ako je $x - y = 2$, onda je $x + y = 1009$. Opet sabiranjem jednačina imamo

$$x - y + x + y = 2 + 1009 \implies 2x = 1011 .$$

Slično kao gore zaključujemo da je i ovo nemoguća situacija.

3: Ako je $x - y = -1$, onda je $x + y = -2018$. Opet sabiranjem jednačina imamo

$$x - y + x + y = -1 + (-2018) \implies 2x = -2019 .$$

Slično kao prethodno zaključujemo da je i ovo nemoguća situacija.

4: Ako je $x - y = -2$, onda je $x + y = -1009$. Opet sabiranjem jednačina imamo

$$x - y + x + y = -2 + (-1009) \implies 2x = -1011 .$$

Slično kao prethodno zaključujemo da je i ovo nemoguća situacija.

Dakle, zadata jednačina nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje: 2.

$2018 \equiv 2 \pmod{3}$, to jest dijeleći 2018 sa 3 dobijamo ostatak 2. Ako i lijevu stranu jednačine dijelimo sa 3 imamo sljedeće rasuđivanje, x^2 može dati ostatak 0 ili 1 u dijeljenju sa 3, a isto tako i y^2 . Dakle, $x^2 - y^2$ u dijeljenju sa 3 može dati ostatak ili 0 ili 1, a kako desna strana ima ostatak 2 u dijeljenju sa 3, zaključujemo da polazna jednačina nema rješenja. \square

Eman Suljendić, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 13. Odrediti interval za x u kome je funkcija

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+34-12\sqrt{x-2}} ,$$

konstantna.

Rješenje: Uvedimo smjenu $t = \sqrt{x-2}$, $t \geq 0$. Tada je $t^2 = x-2$, odnosno $x = t^2 + 2$. Uvrstimo ovo u polaznu funkciju,

$$\begin{aligned} y &= t + \sqrt{t^2 + 2 + 34 - 12t} \\ &= t + \sqrt{t^2 - 12t + 36} \\ &= t + \sqrt{(t-6)^2} \\ &= t + |t-6| \end{aligned}$$

Razmatrajmo sada dva slučaja:

1. $t \in [0, 6]$. Tada je

$$y = t - (t - 6) = t - t + 6 = 6 = \text{const} .$$

Kako je $0 \leq t \leq 6$ onda imamo da je $0 \leq \sqrt{x-2} \leq 6$. Dakle, $0 \leq x-2 \leq 36$, to jest $2 \leq x \leq 38$.

2. $t \in (6, +\infty)$. Tada je

$$y = t + (t - 6) = t + t - 6 = 2t - 6 .$$

Dakle, na ovom intervalu funkcija nije konstantna.

Zaključujemo da je $y = 6 = \text{const}$ za $x \in [2, 38]$. \square

Zerina Ahmetović, 2r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 14. Odrediti sumu datog izraza:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2 , \quad x \neq \pm 1 , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Rješenje: Označimo sa S sumu koju trebamo naći. Tada imamo,

$$\begin{aligned}
 S &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} + \dots + x^{2n} + 2 + \frac{1}{x^{2n}} \\
 &= (x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}} \right) + 2n \\
 &= \frac{x^2((x^2)^n - 1)}{x^2 - 1} + \frac{\frac{1}{x^2} \left(\left(\frac{1}{x^2} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{x^2} - 1} + 2n \\
 &= \frac{x^{2n+2} - x^2}{x^2 - 1} + \frac{\frac{1}{x^2} \frac{1 - x^{2n}}{x^{2n}}}{\frac{1 - x^2}{x^2}} + 2n \\
 &= \frac{x^{4n+2} - x^{2n+2} + x^{2n} - 1}{x^{2n}(x^2 - 1)} + 2n \\
 &= \frac{(x^{2n} - 1)(x^{2n+2} + 1)}{x^{2n}(x^2 - 1)} + 2n
 \end{aligned}$$

□

Zadatak 15. *Riješiti jednačinu:*

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}.$$

Rješenje: D.P. $x \geq 0$, $x + \sqrt{x} \neq 0$, $x - \sqrt{x} \geq 0$. Ovi uslovi nam daju da mora biti $x \in [1, +\infty)$.

Polazna jednačina je ekvivalentna sa

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}} = \sqrt{x - \sqrt{x}}.$$

Kvadriranjem gornje jednačine, dobijamo

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} \right)^2 - 2 \frac{3}{2} \sqrt{\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} \right) \frac{x}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}} + \frac{9}{4} \left(\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}} \right)^2 = \left(\sqrt{x - \sqrt{x}} \right)^2.$$

Sređujući gornju jednakost imamo

$$x + \sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{9}{4} \frac{x}{x + \sqrt{x}} = x - \sqrt{x},$$

odnosno

$$\frac{9x}{4(x + \sqrt{x})} - \sqrt{x} = 0.$$

Množimo posljednju jednakost sa $4(x + \sqrt{x}) \neq 0$, te dobijamo jednakost

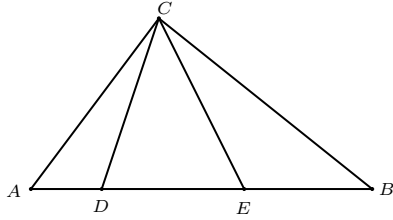
$$9x - 4x\sqrt{x} - 4x = 0,$$

to jest $5x = 4x\sqrt{x}$. Dijeleći ovu jednakost sa $x \neq 0$ imamo, $5 = 4\sqrt{x}$, a nakon kvadriranja je $25 = 16x$. Iz ovoga dobijamo vrijednost za x , to jest $x = \frac{25}{16}$, a kako ovaj x pripada oblasti definisanosti, zaključujemo da je to rješenje jednačine. □

Zadatak 16. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla $\triangle ABC$ date su tačke D i E takve da je $|AE| = |AC|$ i $|BD| = |BC|$. Izračunati $\angle DCE$.

Rješenje: Trouglovi $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$ su jednakokraki, pa vrijedi $\angle ACE = \angle CEA$ i $\angle DCB = \angle CDB$. Označimo $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle CBA$. Iz trougla $\triangle ABC$ imamo $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, a to nam daje $\alpha + \beta = 90^\circ$. Stavimo $\gamma = \angle ACE = \angle CEA$. Iz trougla $\triangle ACE$ imamo

$$2\gamma + \alpha = 180^\circ \implies 2\gamma = 180^\circ - \alpha \implies \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$



Označimo $\delta = \angle DCB = \angle CDB$, pa iz trougla $\triangle BCD$ imamo

$$2\delta + \beta = 180^\circ \implies 2\delta = 180^\circ - \beta \implies \delta = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Sada traženi ugao nalazimo iz trougla $\triangle CDE$.

$$\angle DCE = 180^\circ - \gamma - \delta = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha + \beta}{2} = 45^\circ.$$

Dakle, $\angle DCE = 45^\circ$. □

Marinela Mitić, 1r, Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla

Zadatak 17. Ako je $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ i $a_i > -\frac{1}{4}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), tada je

$$\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1} < n + 2.$$

Dokazati!

Rješenje: Transformišimo polazni uslov $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, množeći ga sa 4.

$$4a_1 + 4a_2 + \dots + 4a_n = 4.$$

Uvećajmo i lijevu i desnu stranu ove jednakosti za $2n$ (svakom izrazu $4a_i$ dodajmo 2),

$$4a_1 + 2 + 4a_2 + 2 + \dots + 4a_n + 2 = 4 + 2n.$$

Posljednju jednakost zapišimo malo drugačije,

$$((4a_1 + 1) + 1) + ((4a_2 + 1) + 1) + \dots + ((4a_n + 1) + 1) = 2n + 4,$$

podijelimo ovu jednakost sa 2 imamo

$$\frac{(4a_1 + 1) + 1}{2} + \frac{(4a_2 + 1) + 1}{2} + \dots + \frac{(4a_n + 1) + 1}{2} = n + 2. \quad (1)$$

Koristeći AG nejednakost vrijedi,

$$\begin{aligned}\frac{(4a_1 + 1) + 1}{2} &> \sqrt{(4a_1 + 1) \cdot 1}, \\ \frac{(4a_2 + 1) + 1}{2} &> \sqrt{(4a_2 + 1) \cdot 1}, \\ &\vdots \\ \frac{(4a_n + 1) + 1}{2} &> \sqrt{(4a_n + 1) \cdot 1},\end{aligned}$$

U gornjem korištenju AG nejednakosti uzimamo strogu nejednakost jer je $a_i > \frac{1}{4}$ za sve $i = 1, 2, \dots, n$. Sada sabirajući ove nejednakosti dobijamo,

$$\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1} < \frac{(4a_1 + 1) + 1}{2} + \frac{(4a_2 + 1) + 1}{2} + \dots + \frac{(4a_n + 1) + 1}{2}.$$

Koristeći jednakost (1), konačno zaključujemo

$$\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1} < n + 2,$$

što je i trebalo dokazati. □

Amina Jahić, 2r, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 18. Ako je $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$, gdje su a i b istog predznaka, $a \neq 0$ i $b \neq 0$, dokazati da je

$$\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} &= \frac{1}{a+b} \quad / \cdot b \implies \frac{b}{a} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{b}{a+b} \\ &\implies \frac{b}{a} \sin^4 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{b}{a+b} \\ &\implies \frac{b}{a} \sin^4 \alpha + 1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha - \frac{b}{a+b} = 0 \\ &\implies \left(\frac{b}{a} + 1\right) \sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha + \frac{a+b-b}{a+b} = 0 \\ &\implies \frac{a+b}{a} \sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha + \frac{a}{a+b} = 0.\end{aligned}$$

Posljednju jednačinu rješavamo kao kvadratnu jednačinu po $\sin^2 \alpha$.

$$\sin^2 \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \frac{a}{a+b} \frac{a+b}{a}}}{2 \frac{a+b}{a}} = \frac{2 \pm 0}{2 \frac{a+b}{a}} = \frac{a}{a+b}.$$

Tada je,

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} &= \frac{(\sin^2 \alpha)^4}{a^3} + \frac{(\cos^2 \alpha)^4}{b^3} = \frac{a^4}{(a+b)^4} + \frac{b^4}{(a+b)^4} \\
 &= \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{a+b}{(a+b)^4} \\
 &= \frac{1}{(a+b)^3} .
 \end{aligned}$$

□

Amina Fazlić, 3r, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Zadatak 19. Tačke P i R su redom središta stranica AB i CD konveksnog četverougla $ABCD$. Duži \overline{BR} i \overline{CP} se sijeku u tački Q , a duži \overline{AR} i \overline{PD} u tački S . Dokazati da je

$$P_{\square PQRS} = P_{\triangle ASD} + P_{\triangle BQC} .$$

Rješenje: Četverougao $CDEG$ je trapez. pa je RF srednja linija tog trapeza i vrijedi $|RF| = \frac{1}{2}(|CG| + |DE|)$.

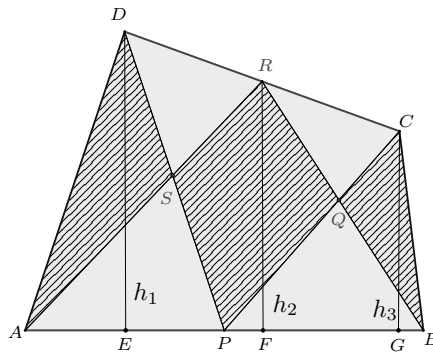
Označimo redom $DE = h_1$, $RF = h_2$ i $CG = h_3$. Tada je $h_2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_3)$.

$$\begin{aligned}
 P_{\triangle ABR} &= \frac{1}{2}|AB| \cdot h_2 = \frac{1}{2}|AB| \frac{1}{2}(h_1 + h_3) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}|AB| \cdot h_1 + \frac{1}{2}|AB| \cdot h_3 \right) \\
 &= P_{\triangle APD} + P_{\triangle PBC} .
 \end{aligned}$$

Sada imamo,

$$\begin{aligned}
 P_{\square PQRS} &= P_{\triangle ABR} - P_{\triangle APS} - P_{\triangle PBQ} \\
 &= P_{\triangle APD} + P_{\triangle PBC} - P_{\triangle APS} - P_{\triangle PBQ} \\
 &= (P_{\triangle APD} - P_{\triangle APS}) + (P_{\triangle PBC} - P_{\triangle PBQ}) \\
 &= P_{\triangle ASD} + P_{\triangle BQC} ,
 \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.



Slika 1: Konveksni četverougao

□

Zadatak 20. Uglovi trougla čine aritmetički niz. Izračunati ih ako je zbir njihovih sinusa jednak $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.

Rješenje: Neka su α , β i γ uglovi trougla koji čine aritmetički niz. Dakle, za ove uglove vrijedi $\beta - \alpha = \gamma - \beta$. Ovo znači da je $2\beta = \alpha + \gamma$, to jest $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Kako je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, tada imamo

$$\begin{aligned}\alpha + \frac{\alpha + \gamma}{2} + \gamma &= 180^\circ \implies 2\alpha + \alpha + \gamma + 2\gamma = 360^\circ \\ &\implies 3\alpha + 3\gamma = 360^\circ \\ &\implies \alpha + \gamma = 120^\circ.\end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $\beta = 60^\circ$.

Po uslovu zadatka je

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

Primjenjujući adicijonu formulu na prvi i treći sabirak i koristeći da je $\beta = 60^\circ$, sada imamo,

$$\begin{aligned}2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + \sin 60^\circ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \implies 2 \sin \frac{120^\circ}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ &\implies 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\implies \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\implies \frac{\alpha - \gamma}{2} = 30^\circ \\ &\implies \alpha - \gamma = 60^\circ.\end{aligned}$$

Sada imamo sistem jednačina

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= 120^\circ \\ \alpha - \gamma &= 60^\circ,\end{aligned}$$

čije je rješenje $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, a od ranije znamo $\beta = 60^\circ$. □

Muhibija Kavazović, 3r, Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla

Rješavatelji zadataka 11 – 20: Osnovna škola

OŠ "Malešići" Malešići - sljedeći učenici: *Aljić Lejla* (6r): 13,20; *Buljubašić Tarik* (6r): 11,13; *Delić Sumea* (6r): 11,20; *Mešanović Nejra* (6r): 11,12; *Hankušić Abdulah* (6r): 11,13;

OŠ "Hasan Kikić" Gračanica - sljedeći učenici: *Selimović Ena* (7r): 14; *Zaketović Senada* (7r): 20; *Osmanhodžić Medina* (7r): 15; *Husanović Dalila* (7r): 16; *Hodžić Ejub* (7r): 17;

Rješavatelji zadataka 11-20: Srednja škola

Gimnazija "Meša Selimović Tuzla - sljedeći učenici: *Suljendić Emana* (1r): 12. i 16.; *Mitić Marinela* (2r): 12. i 16.; *Mazalović Aida* (2r): 11., 15. i 16.; *Rakovac Kanita* (2r): 11., 12. i 16.; *Ahmetović Zerina* (3r): 12., 13. i 16.;

Gimnazija "Ismet Mujezinović" - sljedeći učenici: *Jahić Amina* (3r): 11., 12., 13., 15. (uz korekciju), 16. i 17.; *Fazlić Amina* (4r): 11., 12. i 18.; *Kavazović Muhibija* (3r): 18. i 20.;