II grupa

Zadaci za samostalan rad

1. Ako u trouglu ABC vrijedi jednakost:
   a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h_c}$;
   b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{m_c}$;

   dokazati da vrijede nejednakosti:

   a) $\sphericalangle C \leq 120^0$;
   b) $\sphericalangle C \geq 120^0$.

   (uputstvo: u prvom slučaju tražiti uslov u obliku trigonometrijske jednačine u funkciji od ugla $\sphericalangle C$; u drugom slučaju izraziti sve preko stranica trougla)

2. Kroz prosječnu tačku O dijagonala konveksnog četverougla $ABCD$ prolazi prava koja presjeca stranice AB i CD četverougla redom u tačkama M i N, a produžetke stranica BC i AD redom u tačkama N_1 i M_1. Dokazati da vrijedi jednakost
$$\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM_1}=\frac{1}{ON}-\frac{1}{ON_1}.$$
   (uputstvo: transformisati uslov i utvrditi šta je dovoljno dokazati da bi vrijedila tvrdnja zadatka; tvrdnju je moguće dokazati upotrebom Menelajevog teorema)
3. Dokazati da su kružnice koje prolaze kroz svaka dva vrha trougla i njegov ortocentar jednake kružnici opisanoj oko datog trougla.
   (uputstvo: izračunati poluprečnike navedenih kružnica)
4. Neka su BM i CN dužine simetrala uglova β i γ trougla ABC, gdje $M \in AC$ i $N \in AB$. Neka je D presječna tačka prave MN i opisane kružnice k trougla ABC. Dokazati da vrijedi jednakost
$$\frac{1}{BD}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{CD}.$$
   (uputstvo: utvrditi šta je dovoljno dokazati da bi vrijedila tvrdnja zadatka)

5. U unutrašnjosti trougla ABC zadane su tačke K, L, M na stranicama AB, BC, CA, respektivno, tako da vrijedi

$$\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}.$$

Ako su opisane kružince trouglova AKM, BLK i CML podudarne onda su podudarne i upisane kružince ovih trouglova.

(uputstvo: utvrditi šta je dovoljno dokazati za trougao ABC; da li je dovoljno dokazati da su trouglovi AKM, BLK i CML podudarni?)

6. U trouglu ABC tačke K i L uzete su na stranicama AB i BC tako da vrijedi $AK = KL = LC$. Kroz presjek pravih AL i CK povučena je prava paralelna sa simetralom ugla kod vrha B koja siječe stranicu AB u tački M. Dokazati da vrijedi $AM = BC$.
(uputstvo: posmatrati zadatak iz oba smjera; ustanoviti šta je dovoljno izračunati)
7. Tačke I i O su centri upisane i opisane kružnice trougla ABC, respektivno. Dopisana kružnica k_A tangentna je sa stranicama AB, BC i CA u tačkama K, M, N, respektivno (ili njihovim produžecima). Tačka P je središte duži KM i pripada opisanoj kružnici oko trougla ABC. Dokazati da su tačke O, I i N kolinearne.
(uputstvo: interpretirati uslove i utvrditi šta je dovoljno dokazati da bi vrijedila tvrdnja zadatka)
8. Upisana kružnica u trougao ABC dodiruje stranice BC, CA i AB u tačkama D, E i F, respektivno. Tačka X je tačka u unutrašnjosti trougla ABC tako da kružnica upisana u trougao XBC dodiruje stranice BC, CX i XB u tačkama D, Y i Z, respektivno. Dokazati da je četverougao $EFZY$ tetivan.

   (uputstvo: šta je ekvivalenta tvrdnja? šta je dovoljno dokazati da bi vrijedila ekvivalentna tvrdnja? tvrdnju je moguće dokazati upotrebom Menelajevog teorema)

9. Tačka O je centar opisane kružnice oštrouglog trougla ABC, a tačka P je podnožje normale iz vrha A na stranicu BC. Za trougao ABC vrijedi

$$\sphericalangle ACB \geq \sphericalangle ACB + 30^0.$$

Dokazati da vrijedi nejednakost $\sphericalangle BAC + \sphericalangle COP < 90^0$.

(uputstvo: šta je ekvivalento tvrdnji zadatka u trouglu OCP? šta je dovoljno dokazati?)