Potencija tacke na kruznicu 1

Notacija:

-$Pow(P,k) = |OP^2 - r^2|$ je potencija tacke P na kruznicu k sa centrom u O i poluprecnikom r.
-Prava za ciju svaku tacku P vrijedi $Pow(P,k_1) = Pow(P,k_2)$ naziva se radikalna osa (potencijala) kruznica k_1 i $k_2 rad(k_1,k_2)$.

Stavovo potencije tacke na kruznicu:
-Neka je dana kruznica k,sa centrom u O ,poluprecnika r,i prave p,q koje se sijeku u tacki M.Neka prava p sijece kruznicu u tackama A i B,i neka prava q sijece kruznicu u tackama C i D .Tada je

$$Pow(M,k) = MA \cdot MB = MC \cdot MD = |OM^2 - r^2|$$

-Neka se duzi AB i CD sijeku u tacki M.Tacke A, B, C, D su konciklicne ako i samo ako je

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

-Ako prava kroz M dodiruje kruznicu k u tacki C tada je

$$Pow(M,k) = MC^2$$

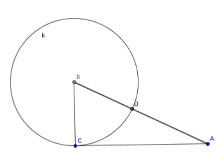
- Tacka P se nalazi na radikalnoj osi kruznica k_1 i k_2 ako i samo ako je $Pow(P,k_1) = Pow(P,k_2)$
- Radikalna osa je okomita na pravu koja spaja centre kruznica.
- Ako se kruznice sijeku u dvije tacke,radikalna osa prolazi kroz ove dvije tacke.
- Ako se kruznice dodiruju,radikalna osa je zajednicka tangenta u tacki dodira.
- Ako su kruznice k_1, k_2 disjunktne,radikalna osa je okomita na pravu l spojnicu centara kruznica u tacki $A \in l$ za koju je

$$Pow(A,k_1) = Pow(A,k_2)$$

- Tri razlicite radikalne ose od tri razlicite kruznice sijeku se u jednoj tacki nazvanoj radikalni centar.

Primjer 1. Trougao je pravougli ako i samo ako je $c^2 = a^2 + b^2$

Rjesenje:



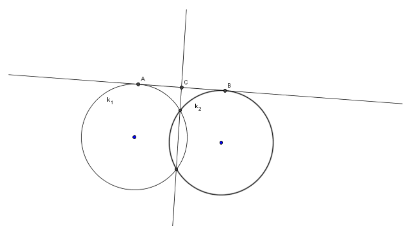
Neka je k kruznica sa centrom u B i poluprecnikom a.Sada je $\angle C = 90°$ ako i samo ako je AC tangentna na k u tacki C , a ovo je ako i samo ako je

$$AC^2 = Pow(A,k) = AB^2 - BC^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Primjer 2. Neka su k_1i k_2 dvije kruznice koje se sijeku.Neka njihova zajednicka tangenta dodiruje k_1 u A i k_2 u B.Pokazati da zajednicka tetiva kruznica k_1 i $k_2$polovi segment AB.

Rjesenje:



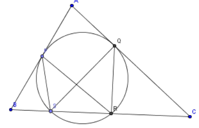
Neka zajednicka tetiva sijece AB u tacki C.Kako je c na radikalnoj osi kruznica to je

$$pow(C,k_1) = pow(C,k_2) \Rightarrow$$

$$CA^2 = CB^2 \Rightarrow CA = CB$$

Primjer 3. Dan je trougao $\triangle ABC$.Neka su P i Q tacke na AB i AC respektivno takve da je $AP = AQ$.Neka su S i R razlicite tacke na segmentu AC takve da je S izmedju B i R i da vrijedi $\angle BPS = \angle PRS$ i $\angle CQR = \angle QSR$.Pokazati da su P, Q, R, S konciklicne tacke.

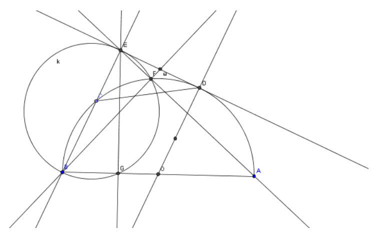
Rjesenje:



Kako je $\angle BPS = \angle PRS$ to kruznica opisana oko $\triangle PRS$ dodiruje AB.(Ugao izmedju tetive i tangente.) Analogno krruznica opisana oko $\triangle QRS$ dodiruje AC.Pretpostavimo da su kruznice opisane oko $\triangle PRS$ i $\triangle QRS$ razlicite.Kako vrijedi $AP = AQ$ to se tacka A nalazi na radikalnoj osi ovih dviju kruznica.No radikalna osa sadrzi RS pa imamo $A \in BC$ sto je kontradikcija.

Primjer 4. Neka su C tacka na polukruznici ω sa precnikom AB,i neka je D sredina luka AC.Neka je E projekcija tacke D na pravu BC i F presjek prave AE sa polukruznicom.Pokazati da BF polovi segment DE.

Rjesenje:



Neka je G podnozje okomice iz E na AB.Kako je $\angle AFB = 90^\circ$(ugao nad precnikom),to je $\angle BFE = 90^\circ$,pa su E, F, G, B na kruznici k cija je tangenta DE.Neka je O centar polukruznice ω.Tada je $\angle ADO = \angle CDO$ jer je D polovina luka.No sada je

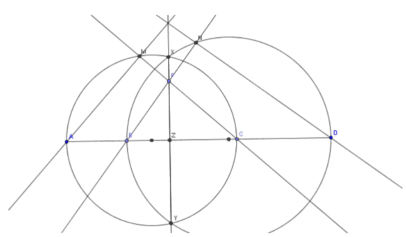
$$\angle EDC + \angle CDO = \angle EDC + \angle ADO = \angle EDC + \angle OAD =$$

$$= \angle EDC + \angle DCE = 90^\circ$$

Dakle prava DE je zajednicka tangenta kruznica k i ω ,a prava BF je njihova radikalna osa ,pa tvrdnja slijedi iz primjera 2.

Primjer 5. Neka su A, B, C, D cetiri razlicite tacke na pravoj u ovom poretku.Kruznice sa precnicima AC i BD sijeku se u tackama X i Y .Prava XY sijece BC u Z.Neka je P tacka na XY razlicita od Z .Prava CP sijece kruznicu sa precnikom AC u C i M,prava BP sijece kruznicu sa precnikom BD u B i N .Pokazati da su AM, DN, XY konkurentne.

Rjesenje:



Neka su k_1 i k_2 kruznice sa precnicima AC i BD redom.$\angle AMC = \angle BND = 90^\circ$.Kako je P na radikalnoj osi kruznica k_1i k_2 to je

$$PB \cdot PN = PC \cdot PM$$

Pa je $BCNM$ tetivan cetverougao,te je

$$\angle DNM = 90^\circ + \angle BNM = 90^\circ + \angle BCM =$$

$$= 90^\circ + 90^\circ - \angle DAM = 180^\circ - \angle DAM$$

Dakle imamo da je $AMND$ tetivan sa opisanom kruznicom k_3.No sada je AM radikalna osa kruznica k_1 i k_3,prava DN je radikalna osa kruznica k_2 i k_3,i prava XY je radikalna osa kruznica k_1i k_2 te se one sijeku u radikalnom centru.

Zadaci za samostalan rad:

1. Kroz tacku P u unutrasnjosti kruznice k prolaze tri tetive jednakih duzina.Pokazati da je P centar kruznice.

2. Neka su A, B, C tri tacke na kruznici k takve da je $AB = BC$.Neka se tangente u A i B sijeku u D.Neka DC sijece k ponovo u E.Pokazati da prava AE polovi segment BD.

3. Dvije kruznice ω_1 i ω_2 sa centrima sijeku se u tackama X i Y .Neka prava l_1 kroz centar kruznice ω_1 sijece kruznicu ω_2u tackama P i Q.Prava l_2 kroz centar ω_2 sijece ω_1 u tackama R i S .Ako tacke P, Q, R, S leze na jednoj kruznici,pokazati da je centar ove kruznice na XY.

4. U trouglu sa centrima upisane i opisane kruznice I i O i poluprecnicima upisane i opisane kruznice r i R vrijedi

$$OI^2 = R(R - 2r)$$

5.Na stranici BC trougla $\triangle ABC$ uzeta je tacka A_1.Simetrala segmenta A_1B sijece stranicu AB u tacki M,simetrala segmenta A_1C sijece stranicu AC u tacki N.Pokazati da tacka simetricna tacki A_1 u odnosu na pravu MN lezi na kruznici opisanoj oko trougla $\triangle ABC$.