KANTONALNO TAKMIČENJE
UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA TUZLANSKOG KANTONA
IZ MATEMTIKE

Gradačac, 11.04.2009. godine

V razred

1. Koliko ima trocifrenih brojeva djeljivih sa 5 kojima je zbir cifre desetice i stotice jednak 12?

2. Ako brojeve 1199 i 1391 podijelimo istim brojem dobivamo ostatak 10, odnosno 28. S kojim brojem smo podijelili zadane brojeve?

3. Odredi zbir
$$5+10+15+20+\ldots+2000+2005.$$

4. Osmina ugla α jednaka je desetini njemu komplementnog ugla ß. Koliki je zbir uglova suplementnih uglovima α i ß?

VI razred

1. Ako se stranica kvadrata poveća za 6cm, površina kvadrata se poveća za 120cm^2. Odrediti dužinu stranica kvadrata.

2. Sa koliko nula se završava proizvod prvih 150 prirodnih brojeva?

3. Kada je pješak prešao $\frac{1}{4}$ puta i još 5km, ostalo mu je da pređe još $\frac{1}{3}$ puta i 10km. Kolika je dužina puta?

4. Dat je paralelogram $ABCD$ ($AB>BC$). Nad stranicama AB i BC sa spoljnih strana konstruirani su kvadrati $ABMN$ i $BCPQ$. Dokazati da je $BD=MQ$.

VII razred

1. Odnos dužina hipotenuze i jedne katete pravouglog trougla je 101:99. Izračunati odnos dužina hipotenuze i druge katete.

2. Ako je a dužina osnovice , a b dužina kraka jednakokrakog trougla sa uglom pri vrhu od 150^o, dokazati da je $a^2=b^2(2+\sqrt{3})$.

3. U jednoj vrsti čelika je 5% nikla, a u drugoj 40% nikla. Koliko tona treba uzeti od svake vrste čelika da bi se dobilo 140 tona čelika u kome je 30%?

4. Odredi trocifren broj koji je 12 puta veći od zbira svojih cifara.

VIII razred

1. Ako dužinu katete AC pravouglog trougla ABC smanjimo za 3cm, a dužinu katete BC povećamo za 9cm, dobivamo pravougli trougao čija je hipotenuza podudarna hipotenuzi AB. Isto važi i ako dužinu katete AC smanjimo za 20cm, a dužinu katete BC povećamo za 40cm. Izračunati dužine stranica trougla ABC.

2. Izračunati površinu i zapreminu kvadra ako su dužine dijagonala triju njegovih strana p, q i r.

3. Dokazati da ako je $x+y+z=1$, onda važi $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$. Kada važi jednakost?

4. Tri radnika, radeći zajedno, urade jedan posao za dva dana. Prvi i drugi radnik zajedno urade isti posao za tri dana, a drugi i treći zajedno za četiri dana. Za koje vrijeme bi svaki od njih sam uradio taj posao?

Rješenja

V razred

1. Koliko ima trocifrenih brojeva djeljivih sa 5 kojima je zbir cifre desetice i stotice jednak 12?

Trocifreni broj $\overline{abc}$ djeljiv je sa 5 ako mu je cifra c jednaka 0 ili 5.
Za cifre a i b vrijedi $a+b=12$. Dakle imamo jednu od sedam mogućnosti:

a	3	4	5	6	7	8	9
b	9	8	7	6	5	4	3

Traženih trocifrenih brojeva ima $7 \cdot 2 = 14$

2. Ako brojeve 1199 i 1391 podijelimo istim brojem dobivamo ostatak 10, odnosno 28. S kojim brojem smo podijelili zadane brojeve?

Ako brojeve 1199 i 1391 umanjimo za 10, odnosno za 28 dobivamo dva broja koja su djeljiva istim brojem.
Rastavimo brojeve 1189 i 1363 na faktore.
$1189 = 29 \cdot 41$
$1363 = 29 \cdot 47$
Kako je $29 > 28$ to je traženi broj.

3. Odredi zbir

$$5+10+15+20+\ldots+2000+2005.$$

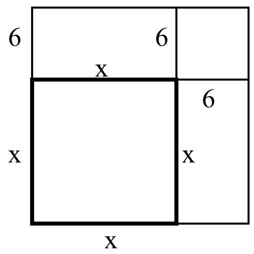
$5+10+15+20+\ldots+2000+2005 = 5\cdot(1+2+3+4+\ldots+400)+2005 = 5\cdot 401\cdot 200+2005 = 403005$

4. Osmina ugla α jednaka je desetini njemu komplementnog ugla ß. Koliki je zbir uglova suplementnih uglovima α i ß?

$\frac{\alpha}{8} = \frac{\beta}{10}$, $\alpha = \frac{8}{10}\beta$ i $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\alpha = 40^\circ$ i $\beta = 50^0$,
$x = 180^\circ - \alpha$ i $y = 180^\circ - \beta$. Tada je $x = 140^\circ$ i $y = 130^\circ$, pa je $x + y = 270^\circ$.

VI razred

1. Ako se stranica kvadrata poveća za 6cm, površina kvadrata se poveća za 120cm^2. Odrediti dužinu stranica kvadrata.



Povećanjem stranice za 6cm površine se povećava za 36cm^2 i za dva podudarana pravougaonika površine 6x. dakle površina se povećala za:

$$(36+2\cdot 6\cdot x)\ \text{cm}^2$$

Iz

$$36+12\cdot x=120$$

je

$$x=7\text{cm}.$$

2. Sa koliko nula se završava proizvod prvih 150 prirodnih brojeva?

Među prvih 150 prirodnih brojeva ima 30 brojeva djeljivih sa 5, od kojih je 6 djeljivo sa 25 i jedan sa 125. Stoga njihov proizvod ima 30+6+1=37 nula.

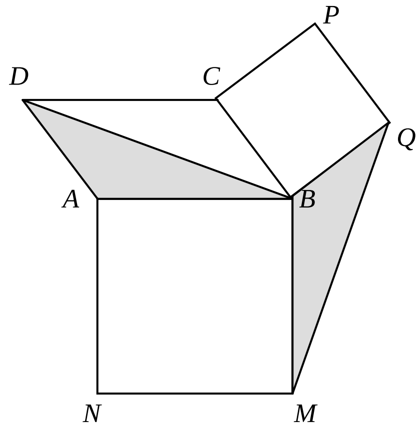
3. Kada je pješak prešao $\frac{1}{4}$ puta i još 5km, ostalo mu je da pređe još $\frac{1}{3}$ puta i 10km. Kolika je dužina puta?

Neka je x dužina puta. Očigledno je

$$\frac{x}{4}+5+\frac{x}{3}+10=x.$$

Rješenje dobivene jednadžbe je x=36km. To je tražena dužina puta.

4. Dat je paralelogram *ABCD* (*AB*>*BC*). Nad stranicama *AB* i *BC* sa spoljnih strana konstruirani su kvadrati *ABMN* i *BCPQ*. Dokazati da je *BD*=*MQ*.



Trouglovi MBQ i ABD su podudarni, jer je

$$MB=AB,\ AD=CB=BQ \quad \text{i} \quad \angle MBQ=360^{o}-90^{o}-90^{o}-(180^{o}-\angle BAD)=\angle BAD.$$

Iz podudarnosti je očigledno

$$MQ=BD.$$

VII razred

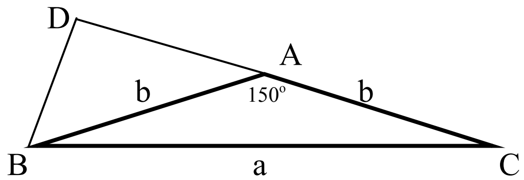
1. Odnos dužina hipotenuze i jedne katete pravouglog trougla je 101:99. Izračunati odnos dužina hipotenuze i druge katete.

Ako su a, b i c dužine kateta i hipotenuze datog trougla i ako je $c:a=101:99$, onda je $c=101t$ i $a=99t$, gdje je t neki pozitivan realan broj. Na osnovu Pitagorine teoreme je

$$b^2=101^2t^2-99^2t^2=(101^2-99^2)t^2=20^2t^2$$

pa je $b=20t$. Prema tome , $c:b=101:20$.

2. Ako je a dužina osnovice , a b dužina kraka jednakokrakog trougla sa uglom pri vrhu od 150^o, dokazati da je $a^2=b^2(2+\sqrt{3})$.



Ako je BD visina trougla ABC, onda je $|BD|=\frac{b}{2}$ i $|AD|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao BCD dobivamo da je

$$a^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(b+\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$$

$$a^2=\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$$a^2=b^2\left(2+\sqrt{3}\right).$$

3. U jednoj vrsti čelika je 5% nikla, a u drugoj 40% nikla. Koliko tona treba uzeti od svake vrste čelika da bi se dobilo 140 tona čelika u kome je 30%?

Ako uzmemo x tona čelika u kome je 5% nikla, tada iz jednadžbe

$$0{,}05\cdot x+0{,}40\cdot(140-x)=0{,}30\cdot 140,$$

dobivamo da je $x=40$. Prema tome potrebno je uzeti 40 tona čelika prve i 100 tona čelika druge vrste.

4. Odredi trocifren broj koji je 12 puta veći od zbira svojih cifara.

Ako su a, b i c cifre stotica, desetica i jedinica traženog broja, onda iz uslova

$$100a+10b+c=12(a+b+c)$$

slijedi da je $2b=11(8a-c)$. Pošto je b jednocifren broj, a mora biti djeljiv sa 11, znači da je $b=0$. Tada je $8a$-c=0, odnosno $a=1$ i $c=8$. Traženi broj je 108.

VIII razred

1. Ako dužinu katete AC pravouglog trougla ABC smanjimo za 3cm, a dužinu katete BC povećamo za 9cm, dobivamo pravougli trougao čija je hipotenuza podudarna hipotenuzi AB. Isto važi i ako dužinu katete AC smanjimo za 20cm, a dužinu katete BC povećamo za 40cm. Izračunati dužine stranica trougla ABC.

Ako su a i b dužine kateta AC i BC

$$(a-3)^2+(b+9)^2=a^2+b^2$$
$$(a-20)^2+(b+40)^2=a^2+b^2$$

Iz ovih jednakosti dobivamo

$$a-3b=15$$
$$a-2b=50$$

odakle je a=120cm i b=35cm a na osnovu Pitagorine teoreme c=125cm.

2. Izračunati površinu i zapreminu kvadra ako su dužine dijagonala triju njegovih strana p, q, i r.

Ako su a, b i c dužine ivica kvadra, onda je

$$p^2=b^2+c^2,\ \ q^2=c^2+a^2,\ \ r^2=a^2+b^2.$$

Ako od zbira prve dvije oduzmemo treću jednakost dobivamo da je

$$2c^2=p^2+q^2-r^2$$

Slično je i

$$2a^2=q^2+r^2-p^2,\ \ 2b^2=r^2+p^2-q^2.$$

Iz ovih jednakosti slijedi da je

$$\mathrm{V}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(p^2+q^2-r^2)(q^2+r^2-p^2)(r^2+p^2-q^2)}$$

$$\mathrm{P}=\sqrt{(p^2+q^2-r^2)(q^2+r^2-p^2)}+\sqrt{(q^2+r^2-p^2)(r^2+p^2-q^2)}+$$
$$+\sqrt{(r^2+p^2-q^2)(p^2+q^2-r^2)}\,.$$

3. Dokazati da ako je $x+y+z=1$, onda važi $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$. Kada važi jednakost?

Neka je $x=\frac{1}{3}+\alpha$, $y=\frac{1}{3}+\beta$, $z=\frac{1}{3}+\gamma$ $(\alpha+\beta+\gamma=0)$.

Tada je

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{3}+\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\beta\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\gamma\right)^2=3\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Kako je $\alpha+\beta+\gamma=0$, to je

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\text{ tj.}$$

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}.$$

Jednakost važi kada je x=y=z=$\frac{1}{3}$.

4. Tri radnika, radeći zajedno, urade jedan posao za dva dana. Prvi i drugi radnik zajedno urade isti posao za tri dana, a drugi i treći zajedno za četiri dana. Za koje vrijeme bi svaki od njih sam uradio taj posao?

Neka prvi radnik uradi cio posao za x, drugi za y i trći za z dana.
Tada je

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$$

odakle dobivamo da je

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{6}, \ \frac{1}{x}=\frac{1}{4}, \ \frac{1}{y}=\frac{1}{12}.$$

Prema tome prvi radnik bi posao završio za 4 sata, drug radnik za 12 sati a treći radnik za 6 sati.