

# GEOMETRIJA 1

## Zadaci za 1. i 2. razred

Salem Malikić

|                 |
|-----------------|
| Uglovi na krugu |
|-----------------|

**Zadatak 1.** Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  imaju zajedničku tetivu  $AB$ . Sječice  $p$  i  $q$ , kroz tačku  $A$ , sijeku  $k_1$  u tačkama  $P_1$  i  $Q_1$  i  $k_2$  u tačkama  $P_2$  i  $Q_2$ . Dokazati da je  $\angle P_1BP_2 = \angle Q_1BQ_2$ .

**Zadatak 2.** Oko trougla  $ABC$  opisan je krug. Dokazati da je tetiva  $AM$  opisanog kruga, koja je normalna na stranicu  $AB$ , jednaka duži  $CH$ , gdje je  $H$  ortocentar trougla.

**Zadatak 3.** Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  sa centrima u  $O_1$  i  $O_2$  imaju zajedničku tetivu  $AB$ . Prava  $p$ , koja sadrži tačku  $A$ , siječe date krugove u tačkama  $M_1$  i  $M_2$ . Dokazati da je  $\angle O_1M_1B = \angle O_2M_2B$ .

**Zadatak 4.** Unutrašnji uglovi trougla  $ABC$  su  $\angle BAC = 76^\circ$ ,  $\angle ABC = 40^\circ$ . Neka je  $P$  tačka u trouglu, takva da je  $\angle PAC = \angle PCA = 50^\circ$ . Odrediti uglove  $\angle APB$  i  $\angle BPC$ .

**Zadatak 5.** Simetrale unutrašnjih uglova trougla  $ABC$  sijeku opisani krug ovog trougla u tačkama  $M, N, P$ . Ako je  $AM$  simetrala ugla  $\angle BAC$ , dokazati da je  $AM \perp NP$ .

**Zadatak 6.** Tačka  $O$  je centar opisanog kruga trougla  $ABC$  i tačka  $P$  je podnožje visine iz tjemena  $A$ . Dokazati da je  $\angle BAP = \angle OAC$ .

**Zadatak 7.** Dva kruga imaju zajedničku tetivu  $AB$  i zajedničku tangentu koja ih dodiruje u tačkama  $M$  i  $N$ . Izračunati zbir  $\angle MAN + \angle MBN$ .

**Zadatak 8.** Data je tetiva  $AB$  kruga  $k$  i tangenta u tački  $B$ . Na tangenti je tačka  $C$ , takva da je  $BC = AB$ . Prava  $AC$  siječe krug u tački  $D$ . Dokazati da je  $BD = CD$ .

**Zadatak 9.\*** Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  sa centrima  $O_1$  i  $O_2$  imaju zajedničku tetivu  $AB$ , a zajednička tangenta ih dodiruje redom u tačkama  $C$  i  $D$  pri čemu su  $A$  i  $C$  sa raznih strana prave  $O_1O_2$ . Dokazati da je  $\angle O_1AO_2 = 2\angle CAD$ .

**Zadatak 10.\*** Ugao  $BAD$  datog paralelograma  $ABCD$  je oštar. Ako su  $M, N, P$  podnožja normala iz  $D$  redom na prave  $BC, CA, AB$ , dokazati da opisani krug trougla  $MNP$  sadrži presječnu tačku dijagonala datog paralelograma.

### Tetivni četverouglovi

**Zadatak 11.** Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  se dodiruju spolja, a njihove zajedničke tangente  $a$  i  $b$  dodiruju ih redom u tačkama  $A_1$  i  $A_2$ , odnosno  $B_1$  i  $B_2$ . Dokazati da je četverougao  $A_1A_2B_2B_1$  tetivni.

**Zadatak 12.** Dat je jednakostranični trougao  $ABC$  i tačka  $M$  na stranici  $AB$ . Nad duži  $CM$  konstruisan je jednakostranični trougao  $CMN$ , pri čemu su  $M$  i  $N$  sa raznih strana prave  $BC$ . Dokazati da su prave  $AC$  i  $BN$  paralelne među sobom.

**Zadatak 13.** U trouglu  $ABC$  je  $\angle ACB = 60^\circ$ . Tačke  $M$  i  $N$  su podnožja visina iz tjemena  $A$  i  $B$  redom. Ako je  $C_1$  središte stranice  $AB$ , dokazati da je trougao  $MNC_1$  jednakostranični.

**Zadatak 14.** Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  sijeku se u tačkama  $A$  i  $B$ . Proizvoljna sječica kroz  $A$  siječe krugove  $k_1$  i  $k_2$  u tačkama  $M$  i  $N$ , a proizvoljna sječica kroz  $B$  u tačkama  $P$  i  $Q$ . Dokazati da je  $MP$  paralelno sa  $NQ$ .

**Zadatak 15.** Upisani krug trougla  $ABC$  dodiruje stranicu  $AB$  u tački  $M$  i stranicu  $AC$  u tački  $N$ . Ako je  $P$  presječna tačka prave  $MN$  i simetrale ugla kod vrha  $B$ , dokazati da je  $\angle BPC = 90^\circ$ .

**Zadatak 16.** Oko datog trougla  $ABC$  opisan je krug i u tački  $B$  je konstruisana tangenta  $t$  ovog kruga. Prava  $p$ , paralelna sa  $t$ , siječe stranicu  $AB$  u tački  $D$  i stranicu  $BC$  u tački  $E$ . Dokazati da je četverougao  $ACED$  tetivni.

**Zadatak 17.** U oštrogglom trouglu  $ABC$  duž  $CD$  je visina. Ako su  $M$  i  $N$  podnožja normala iz  $D$  na  $BC$  i iz  $D$  na  $AC$ , dokazati da je četverougao  $ABMN$  tetivni.

**Zadatak 18.** Krugovi sa centrima  $O_1$  i  $O_2$  imaju zajedničku tetivu  $AB$ . Prava  $O_1A$  siječe krug sa centrom  $O_2$  u tački  $D$ . Dokazati da tačke  $O_1, O_2, B$  i  $D$  leže na jednom krugu.

**Zadatak 19.\*** Polukrug, čiji prečnik  $EF$  pripada stranici  $BC$  datog trougla  $ABC$ , dodiruje stranice  $AB$  i  $AC$  redom u tačkama  $P$  i  $Q$ . Dokazati da presječna tačka  $K$  duži  $EP$  i  $FQ$  pripada visini trougla  $ABC$ , konstruisanoj iz tjemena  $A$ .

**Zadatak 20.\*** Na osnovici  $BC$  i kracima  $AB$  i  $AC$  jednakokrakog trougla  $ABC$  date su tačke  $P, Q$  i  $R$ , takve da je  $PQ$  paralelna sa  $AC$  i  $PR$  paralelna sa  $AB$ . Dokazati da tačka, koja je simetrična tački  $P$  u odnosu na pravu  $QR$ , leži na krugu opisanom oko trougla  $ABC$ .

**Porijeklo zadataka:** Svi zadaci za vježbu su zadaci iz knjige "Tetive i tangene" autora Vladimira Stojanovića.