XV matematička olimpijada Bosne i Hercegovine

Mostar, 15. maj 2010.

Zadaci – prvi dan

1.

a) Neka su p i q različiti prosti brojevi takvi da $(p+q^2)|(p^2+q)$. Dokazati da $(p+q^2)|(pq-1)$.

b) Odrediti sve proste brojeve p takve da $(p+121)|(p^2+11)$.

2. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{FD}$ tetive na kružnici, koje se ne sijeku, a P tačka na luku $\widehat{AB}$, koji ne sadrži tetivu $\overline{FD}$. Prave PF i PD sijeku tetivu $\overline{AB}$ u tačkama Q i R. Dokazati da je $\frac{\overline{AQ}\cdot\overline{RB}}{\overline{QR}}$ konstantno, dok se tačka P kreće lukom $\widehat{AB}$.

3. Odrediti sve funkcije $f:\mathbb{Z}\dashrightarrow\mathbb{Z}$ za koje vrijede sljedeća dva uslova:

i. $f(n)\cdot f(-n)=f(n^2)$ za sve $n\in\mathbb{Z}$,

ii. $f(m+n)=f(m)+f(n)+2mn$ za sve $m,n\in\mathbb{Z}$.

- *Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*
- *Vrijeme za izradu zadataka je 4 sata*

Sretno!

XV matematička olimpijada Bosne i Hercegovine

Mostar, 16. maj 2010.

Zadaci – drugi dan

4. Konveksni četverougao podijeljen je dijagonalama na četiri trougla čije su upisane kružnice podudarne. Dokazati da je taj četverougao romb.

5. Neka su a, b, c dužine stranica trougla čiji obim nije veći od 2. Dokazati da je

$$\left|\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}-\frac{a^3}{c}-\frac{c^3}{b}-\frac{b^3}{a}\right|<3.$$

6. Dokazati da je ukupan broj jedinica, koji se pojavljuje u svim neuređenim particijama prirodnog broja n, jednak sumi brojeva različitih elemenata tih particija.

   Napomena: *Za particiju* $10=1+1+2+3+3$ *je broj različitih elemenata particije jednak* 3*, jer su različiti elementi u ovoj particiji* 1*,* 2 *i* 3*.*

- *Svaki zadatak vrijedi 7 bodova*
- *Vrijeme za izradu zadataka je 4 sata*

Sretno!