IZRAČUNAVANJE KONAČNIH SUMA METODIMA DIFERENTNOG RAČUNA

Izlaganje - **Seminar za matematičare, Fojnica 2017.g.**

Prof. dr. MEHMED NURKANOVIĆ

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli

13.01.2015. godine

Definicija

Neka je $x(t)$ funkcija realne ili kompleksne varijable t. ***Diferentni operator*** *(ili razliku prvog reda) definiramo jednakošću*

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t). \tag{1}$$

- Uglavnom ćemo u budućim primjenama smatrati da je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, kao npr. skup $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. U tom slučaju varijablu t zamijenićemo oznakom n, a izraz $x(n)$ sa x_n, pa ćemo jednakost (1) pisati u obliku

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Definicija

Neka je $x(t)$ funkcija realne ili kompleksne varijable t. ***Diferentni operator*** *(ili razliku prvog reda) definiramo jednakošću*

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)\,. \tag{1}$$

- Uglavnom ćemo u budućim primjenama smatrati da je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, kao npr. skup $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. U tom slučaju varijablu t zamijenićemo oznakom n, a izraz $x(n)$ sa x_n, pa ćemo jednakost (1) pisati u obliku

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

- Općenito, razlika reda n definira se indukcijom:

$$\Delta^n x(t) = \Delta\left(\Delta^{n-1} x(t)\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots)\,.$$

Definicija

Translacijski operator *(shift operator ili operator pomaka) definiramo jednakošću*

$$Ex\left(t\right)=x\left(t+1\right). \tag{2}$$

U slučaju da je domen funkcije x skup uzastopnih cijelih brojeva, formula (2) može se pisati u obliku

$$Ex_n=x_{n+1}.$$

Primjedba

Ako sa I označimo identični operator, to jest $I\left(t\right)\equiv t$, tada očigledno imamo $\Delta=E-I$,odnosno $E=\Delta+I$. Osim toga, operatori Δ i E su linearni operatori i međusobno komutiraju ($\Delta E=E\Delta$).

Teorem

Osobine operatora Δ*:*

1. $\Delta^n(\Delta^m x(t)) = \Delta^m(\Delta^n x(t)) = \Delta^{m+n} x(t)$, $(m, n \in \mathbb{N})$,

Teorem

Osobine operatora Δ:

1. $\Delta^n \left(\Delta^m x\left(t\right)\right) = \Delta^m \left(\Delta^n x\left(t\right)\right) = \Delta^{m+n} x\left(t\right)$, *(*$m, n \in \mathbb{N}$*)*,
2. $\Delta\left(x\left(t\right) + y\left(t\right)\right) = \Delta x\left(t\right) + \Delta y\left(t\right)$,

Teorem

Osobine operatora Δ:

1. $\Delta^n\left(\Delta^m x\left(t\right)\right)=\Delta^m\left(\Delta^n x\left(t\right)\right)=\Delta^{m+n}x\left(t\right)$, *(*$m,n\in\mathbb{N}$*)*,
2. $\Delta\left(x\left(t\right)+y\left(t\right)\right)=\Delta x\left(t\right)+\Delta y\left(t\right)$,
3. $\Delta\left(Cx\left(t\right)\right)=C\Delta\left(x\left(t\right)\right)$, *ako je* C *konstanta*,

Teorem

Osobine operatora Δ*:*

1. $\Delta^n \left(\Delta^m x\left(t\right)\right) = \Delta^m \left(\Delta^n x\left(t\right)\right) = \Delta^{m+n} x\left(t\right)$, $(m, n \in \mathbb{N})$,
2. $\Delta\left(x\left(t\right) + y\left(t\right)\right) = \Delta x\left(t\right) + \Delta y\left(t\right)$,
3. $\Delta\left(Cx\left(t\right)\right) = C\Delta\left(x\left(t\right)\right)$, *ako je* C *konstanta*,
4. $$\begin{aligned}\Delta\left(x\left(t\right) y\left(t\right)\right) &= x\left(t\right)\Delta y\left(t\right) + Ey\left(t\right)\Delta x\left(t\right)\\ &= y\left(t\right)\Delta x\left(t\right) + Ex\left(t\right)\Delta y\left(t\right)\\ &= x\left(t\right)\Delta y\left(t\right) + y\left(t\right)\Delta x\left(t\right) + \Delta x\left(t\right)\Delta y\left(t\right),\end{aligned}$$

Teorem

Osobine operatora Δ*:*

1. $\Delta^n\left(\Delta^m x(t)\right) = \Delta^m\left(\Delta^n x(t)\right) = \Delta^{m+n} x(t)$, *(*$m, n \in \mathbb{N}$*),*
2. $\Delta\left(x(t) + y(t)\right) = \Delta x(t) + \Delta y(t)$,
3. $\Delta\left(Cx(t)\right) = C\Delta\left(x(t)\right)$, *ako je* C *konstanta,*
4. $$\begin{aligned}\Delta\left(x(t)\,y(t)\right) &= x(t)\,\Delta y(t) + Ey(t)\,\Delta x(t)\\ &= y(t)\,\Delta x(t) + Ex(t)\,\Delta y(t)\\ &= x(t)\,\Delta y(t) + y(t)\,\Delta x(t) + \Delta x(t)\,\Delta y(t),\end{aligned}$$
5. $$\Delta\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right) = \frac{y(t)\,\Delta x(t) - x(t)\,\Delta y(t)}{y(t)\,Ey(t)}.$$

Primjer

Neka je a konstanta. Tada vrijedi:

1. $\Delta a = a - a = 0,$

Primjer

Neka je a konstanta. Tada vrijedi:

1. $\Delta a = a - a = 0$,
2. $\Delta a^t = a^{t+1} - a^t = (a-1)\, a^t$,

Primjer

Neka je a konstanta. Tada vrijedi:

1. $\Delta a = a - a = 0$,
2. $\Delta a^t = a^{t+1} - a^t = (a-1)\,a^t$,
3. $\Delta \log at = \log a\,(t+1) - \log at = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$,

Primjer

Neka je a konstanta. Tada vrijedi:

1. $\Delta a = a - a = 0,$
2. $\Delta a^t = a^{t+1} - a^t = (a-1)\,a^t,$
3. $\Delta \log at = \log a(t+1) - \log at = \log\left(1+\frac{1}{t}\right),$
4. $\Delta \log \Gamma(t) = \log \Gamma(t+1) - \log \Gamma(t) = \log \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)} = \log \frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t)} = \log t.$

   ♣

Uočimo da za fundamentalne formule diferencijalnog i integralnog računa:

$$(i)\ \int_a^b df(x) = f(b) - f(a) \qquad \text{i} \qquad (ii)\ d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)\,dx$$

postoje odgovarajući diskretni analogoni u diferentnom računu:

$$(i)\ \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_{n_0} \qquad \text{i} \qquad (ii)\ \Delta\left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x_k\right) = x_n.$$

Znamo da u diferencijalnom računu vrijedi $\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1}$. Nažalost, diferencija stepena je komplicirana i kao rezultat nije mnogo upotrebljiva:

$$\Delta_t t^n = (t+1)^n - t^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k.$$

Ipak je moguće doći do slične formule za diferencije, ali je, umjesto stepene funkcije t^n, potrebno uvesti jednu posebnu funkciju.

Definicija

Stepen padajućeg faktoriela $t^{(r)}$ *(čita se "t na r padajući") definiramo, u ovisnosti o vrijednostima varijable r, na sljedeći način:*

1. $t^{(r)} = t\,(t-1)\cdots(t-r+1)$ *za* $r = 1, 2, 3, \ldots\ ,$

Definicija

Stepen padajućeg faktoriela $t^{(r)}$ *(čita se "t na r padajući") definiramo, u ovisnosti o vrijednostima varijable r, na sljedeći način:*

1. $t^{(r)} = t\,(t-1)\cdots(t-r+1)$ *za* $r = 1, 2, 3, \ldots$,
2. $t^{(0)} = 1$, *za* $r = 0$,

Definicija

Stepen padajućeg faktoriela $t^{(r)}$ *(čita se "t na r padajući") definiramo, u ovisnosti o vrijednostima varijable r, na sljedeći način:*

1. $t^{(r)} = t\,(t-1)\cdots(t-r+1)$ *za* $r = 1, 2, 3, \dots$,
2. $t^{(0)} = 1$, *za* $r = 0$,
3. $t^{(r)} = \dfrac{1}{(t+1)\,(t+2)\cdots(t-r)}$, *za* $r = -1, -2, -3, \dots$,

Definicija

Stepen padajućeg faktoriela $t^{(r)}$ *(čita se "t na r padajući") definiramo, u ovisnosti o vrijednostima varijable* r*, na sljedeći način:*

1. $t^{(r)} = t(t-1)\cdots(t-r+1)$ *za* $r = 1, 2, 3, \ldots$,
2. $t^{(0)} = 1$, *za* $r = 0$,
3. $t^{(r)} = \dfrac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t-r)}$, *za* $r = -1, -2, -3, \ldots$,
4. $t^{(r)} = \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$ *ako* r *nije cio broj.*

Primjedba

Naravno, gornja definicija od $t^{(r)}$ *podrazumijeva samo one vrijednosti varijabli* t *i* r *za koje odgovarajuća formula ima smisla. Tako, očigledno, izraz* $(-1)^{(-2)}$ *nije uopće definiran zbog egzistencije vrijednosti* 0 *jednog od faktora u nazivniku razlomka. Isto tako, ni izraz* $\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{4}{3}\right)}$ *nema smisla, jer mu nazivnik* $\Gamma(0)$ *nije definiran.*
Uočimo da za $t = r = n \in \mathbb{N}$, *dobijamo* $n^{(n)} = n!$, *a ako uzmemo* $t = n \in \mathbb{N}$, $r = k \in \mathbb{N}$ *i* $n \geq k$, *onda je*

$$n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

i obično se naziva padajućim faktorielom.

Definicija

Općeniti binomni koeficijent $\binom{t}{r}$ $(t, r \in \mathbb{R})$ *se definira kao*

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{(r)}}{\Gamma(r+1)}.$$

Lemma

Općeniti binomni koeficijenti zadovoljavaju sljedeće važne relacije:

$$\binom{t}{r} = \binom{t}{t-r} \qquad \textit{(simetrija)},$$

$$\binom{t}{r} = \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1} \qquad \textit{(izvlačenje ispred zagrade)},$$

$$\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1} \qquad \textit{(adiciona formula)}.$$

Teorem

Vrijede sljedeće relacije:

1. $\Delta_t t^{(r)} = r t^{(r-1)}$,

Teorem

Vrijede sljedeće relacije:

1. $\Delta_t t^{(r)} = rt^{(r-1)}$,
2. $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1} \quad (r \neq 0)$.,

Teorem

Vrijede sljedeće relacije:

1. $\Delta_t t^{(r)} = rt^{(r-1)}$,
2. $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1} \quad (r \neq 0)$.,
3. $\Delta_t (at+b)^{(r)} = ra(at+b)^{(r-1)}$.

- U slučajevima izračunavanja konačnih razlika, česta je potreba prevodjenja običnog polinoma stepena k

$$P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k$$

u tzv. *faktorielski polinom*

$$\phi_k(n) = a_0 n^{(k)} + a_1 n^{(k-1)} + \ldots a_{k-1} n^{(1)} + a_k.$$

- U slučajevima izračunavanja konačnih razlika, česta je potreba prevodjenja običnog polinoma stepena k

$$P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k$$

u tzv. *faktorielski polinom*

$$\phi_k(n) = a_0 n^{(k)} + a_1 n^{(k-1)} + ... a_{k-1} n^{(1)} + a_k.$$

- U tu svrhu potrebne su nam formule za predstavljanje stepena padajućeg faktoriela pomoću običnih stepena varijable n, kao i obrnuto:

$$n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i^k n^i, \quad n^k = \sum_{i=1}^{k} S_i^k n^{(i)}. \tag{3}$$

- U slučajevima izračunavanja konačnih razlika, česta je potreba prevodjenja običnog polinoma stepena k

$$P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_{k-1} n + a_k$$

u tzv. *faktorielski polinom*

$$\phi_k(n) = a_0 n^{(k)} + a_1 n^{(k-1)} + ... a_{k-1} n^{(1)} + a_k.$$

- U tu svrhu potrebne su nam formule za predstavljanje stepena padajućeg faktoriela pomoću običnih stepena varijable n, kao i obrnuto:

$$n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i^k n^i, \quad n^k = \sum_{i=1}^{k} S_i^k n^{(i)}. \tag{3}$$

- Koeficijenti s_i^k se nazivaju *Stirlingovim brojevima prve vrste*, a koeficijenti S_i^k *Stirlingovim brojevima druge vrste*.

Problem

Izračunati Stirlingove brojeve prve i druge vrste, s_i^k i S_i^k, za $i, k = 1, 2, 3$.

Rješenje. Koristiti činjenice da je $s_0^k = 0, s_k^k = 1$ za $k \geq 1$. Tako se dobije:

$$
\begin{aligned}
n^{(1)} &= 1 \cdot n \Rightarrow s_1^1 = 1, \\
n^{(2)} &= n(n-1) = 1 \cdot n^2 + (-1) \cdot n \Rightarrow s_2^2 = 1, s_1^2 = -1, \\
n^{(3)} &= n(n-1)(n-2) = 1 \cdot n^3 + (-3) \cdot n^2 + 2 \cdot n \\
&\Rightarrow s_3^3 = 1, s_2^3 = -3, s_1^3 = 2, \\
n^1 &= 1 \cdot n^{(1)} \Rightarrow S_1^1 = 1, \\
n^2 &= 1 \cdot n^{(2)} + 1 \cdot n^{(1)} \Rightarrow S_2^2 = 1, S_1^2 = 1, \\
n^3 &= 1 \cdot n^{(3)} + 3 \cdot n^{(2)} + n^{(1)} \Rightarrow S_3^3 = 1, S_2^3 = 3, S_1^3 = 1.
\end{aligned}
$$

Definicija

Ako je X bilo koja funkcija čija je razlika prvog reda funkcija x, tada se X naziva ***antidiferencijom*** *ili* ***neodređenom sumom*** *od x i označava sa $\Delta^{-1}x$ (ili $\sum x$), to jest*

$$\text{ako je } \Delta X(t) = x(t), \text{ tada je } \Delta^{-1}x(t) = X(t).$$

- Općenito definiramo Δ^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ sa:

$$\Delta^{-n}x(t) = \Delta^{-1}\left(\Delta^{-n+1}x(t)\right).$$

Definicija

Ako je X bilo koja funkcija čija je razlika prvog reda funkcija x, tada se X naziva ***antidiferencijom*** *ili* ***neodređenom sumom*** *od x i označava sa $\Delta^{-1}x$ (ili $\sum x$), to jest*

$$\text{ako je } \Delta X(t) = x(t), \text{ tada je } \Delta^{-1}x(t) = X(t).$$

- Općenito definiramo Δ^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ sa:

$$\Delta^{-n}x(t) = \Delta^{-1}\left(\Delta^{-n+1}x(t)\right).$$

- Uočimo da je antidiferentni operator ustvari diskretni analogon neodređenog integrala iz diferencijalnog računa. Naime, jednostavno se vidi da neodređeni integral igra sličnu ulogu u diferencijalnom računu, jer vrijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\int x(t)\,dt\right) = x(t) \text{ i } \int dx(t) = x(t) + C.$$

Teorem

Ako je $y(t)$ antidiferencija od $x(t)$, tada je svaka antidiferencija od $x(t)$ data sa

$$\Delta^{-1}x(t) = y(t) + C(t), \tag{4}$$

gdje je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija x i takva da za nju vrijedi $\Delta C(t) = 0$.

Primjedba

Iz prethodnog teorema slijedi jedna vrlo važna osobina o vezi između diferentnog i antidiferentnog operatora:

$$\Delta^{-1}\Delta f(t) = f(t) + C(t), \tag{5}$$

gdje je $C(t)$ funkcija istog domena kao i funkcija f i takva da za nju vrijedi $\Delta C(t) = 0$. Prema tome, vrijedi

$$\Delta\Delta^{-1} = I \quad i \quad \Delta^{-1}\Delta \neq I,$$

Primjer

Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ *funkcija za koju je* $\Delta C(t) = 0$. *Tada vrijedi:*

1. $\Delta^{-1} a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + C(t), \ \ (a \neq 1).$

Primjer

Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ *funkcija za koju je* $\Delta C(t) = 0$. *Tada vrijedi:*

1. $\Delta^{-1} a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + C(t), \quad (a \neq 1).$
2. $\Delta^{-1} \log t = \log \Gamma(t) + C(t), \quad (t > 0).$

Primjer

Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ *funkcija za koju je* $\Delta C(t) = 0$. *Tada vrijedi:*

1. $\Delta^{-1} a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + C(t), \quad (a \neq 1).$
2. $\Delta^{-1} \log t = \log \Gamma(t) + C(t), \ (t > 0).$
3. $\Delta^{-1} t^{(a)} = \dfrac{t^{(a+1)}}{a+1} + C(t), \ (a \neq -1).$

Primjer

Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ *funkcija za koju je* $\Delta C(t) = 0$. *Tada vrijedi:*

1. $\Delta^{-1} a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + C(t), \ \ (a \neq 1).$
2. $\Delta^{-1} \log t = \log \Gamma(t) + C(t), \ (t > 0).$
3. $\Delta^{-1} t^{(a)} = \dfrac{t^{(a+1)}}{a+1} + C(t), \ (a \neq -1).$
4. $\Delta^{-1} \dbinom{t}{a} = \dbinom{t}{a+1} + C(t).$

Primjer

Neka je a konstanta i neka je $C(t)$ *funkcija za koju je* $\Delta C(t) = 0$. *Tada vrijedi:*

1. $\Delta^{-1} a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + C(t), \quad (a \neq 1).$
2. $\Delta^{-1} \log t = \log \Gamma(t) + C(t), \quad (t > 0).$
3. $\Delta^{-1} t^{(a)} = \dfrac{t^{(a+1)}}{a+1} + C(t), \quad (a \neq -1).$
4. $\Delta^{-1} \binom{t}{a} = \binom{t}{a+1} + C(t).$
5. $\Delta^{-1} \binom{a+t}{t} = \binom{a+t}{t-1} + C(t). \quad \clubsuit$

Teorem

Glavne osobine ***antidiferentnog operatora****:*

1. $\Delta^{-1}\left(x\left(t\right)+y\left(t\right)\right)=\Delta^{-1}x\left(t\right)+\Delta^{-1}y\left(t\right).$

Teorem

Glavne osobine ***antidiferentnog operatora****:*

1. $\Delta^{-1}\left(x\left(t\right)+y\left(t\right)\right)=\Delta^{-1}x\left(t\right)+\Delta^{-1}y\left(t\right).$
2. $\Delta^{-1}\left(\alpha x\left(t\right)\right)=\alpha\Delta^{-1}x\left(t\right)$, *ako je* α *konstanta.*

Teorem

Glavne osobine ***antidiferentnog operatora****:*

1. $\Delta^{-1}\left(x\left(t\right)+y\left(t\right)\right)=\Delta^{-1}x\left(t\right)+\Delta^{-1}y\left(t\right).$
2. $\Delta^{-1}\left(\alpha x\left(t\right)\right)=\alpha\Delta^{-1}x\left(t\right)$, *ako je* α *konstanta.*
3. $\Delta^{-1}\left(x\left(t\right)\Delta y\left(t\right)\right)=x\left(t\right)y\left(t\right)-\Delta^{-1}\left(Ey\left(t\right)\Delta x\left(t\right)\right).$

Teorem

Glavne osobine ***antidiferentnog operatora****:*

1. $\Delta^{-1}(x(t)+y(t)) = \Delta^{-1}x(t) + \Delta^{-1}y(t)$.
2. $\Delta^{-1}(\alpha x(t)) = \alpha \Delta^{-1}x(t)$, *ako je* α *konstanta.*
3. $\Delta^{-1}(x(t)\,\Delta y(t)) = x(t)\,y(t) - \Delta^{-1}(Ey(t)\,\Delta x(t))$.
4. $\Delta^{-1}(Ex(t)\,\Delta y(t)) = x(t)\,y(t) - \Delta^{-1}(y(t)\,\Delta x(t))$.

Teorem

*Glavne osobine **antidiferentnog operatora**:*

1. $\Delta^{-1}(x(t)+y(t))=\Delta^{-1}x(t)+\Delta^{-1}y(t)$.
2. $\Delta^{-1}(\alpha x(t))=\alpha\Delta^{-1}x(t)$, *ako je* α *konstanta.*
3. $\Delta^{-1}(x(t)\Delta y(t))=x(t)y(t)-\Delta^{-1}(Ey(t)\Delta x(t))$.
4. $\Delta^{-1}(Ex(t)\Delta y(t))=x(t)y(t)-\Delta^{-1}(y(t)\Delta x(t))$.

- Osobine 1. i 2. iz prethodnog teorema znače linearnost operatora Δ^{-1}, dok su osobine 3. i 4. poznate kao "*parcijalno sumiranje*". (što je analogno parcijalnoj integraciji u diferencijalnom računu). Formule parcijalnog sumiranja su od fundamentalne važnosti u analizi diferentnih jednadžbi.

Primjer

Izračunati $\Delta^{-1} t3^t$.

Rješenje.

- U prethodnom teoremu u 3. uzmimo da je $x(t) = t$, $\Delta y(t) = 3^t$, pa je $y(t) = \dfrac{3^t}{2}$.

Primjer

Izračunati $\Delta^{-1} t3^t$.

Rješenje.

- U prethodnom teoremu u 3. uzmimo da je $x(t) = t$, $\Delta y(t) = 3^t$, pa je $y(t) = \dfrac{3^t}{2}$.
- Tako vrijedi

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} t3^t &= t\frac{3^t}{2} - \Delta^{-1}\left(\frac{3^{t+1}}{2}\cdot 1\right) + C(t) = t\frac{3^t}{2} - \frac{3}{2}\Delta^{-1}3^t + C(t) \\ &= t\frac{3^t}{2} - \frac{3}{2}\frac{3^t}{2} + C(t) = t\frac{3^t}{2} - \frac{3^{t+1}}{4} + C(t),\end{aligned}$$

gdje je $\Delta C(t) = 0$. ♣

Slično kao u slučaju operatora Δ^{-1}, možemo definirati i operator E^{-1} kao inverzni operator operatora E.

Definicija

Ako je X funkcija za koju je EX upravo funkcija x, tada ćemo pisati $E^{-1}x = X$, to jest

$$\text{ako je } EX(t) = x(t), \text{ tada je } E^{-1}x(t) = X(t). \tag{6}$$

Očito iz (6) direktno slijedi

$$E^{-1}x(t) = x(t-1), \tag{7}$$

jer vrijedi $Ex(t-1) = x(t)$. Također, uočimo da možemo općenito definirati operator E^{-n} $(n \in \mathbb{N})$. Naime, $E^{-n}x$ je funkcija za koju je $E^{n}(E^{-n}x) = x$, ali kako je $E^{n}x(t-n) = x(t)$, to će vrijediti

$$E^{-n}x(t) = x(t-n).$$

Prema jednoj već spomenutoj posljedici, sada imamo

$$\Delta^{-1}x_n = \sum_{k=m}^{n-1} x_k + C \qquad (m \leq n)\,. \tag{8}$$

za neku konstantu C. Jednakosti (8) daje nam vezu između antidiferncije (neodređene sume) i određene sume.

Ovo nam je ujedno prvi metod za izračunavanje konačnih suma.

Ilustrirajmo taj metod sljedećim primjerom.

Problem

Izračunati sumu $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Rješenje.

- Koristeći jednakost (8), imamo

Problem

Izračunati sumu $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Rješenje.

- Koristeći jednakost (8), imamo
- $$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\Delta^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n+C=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}-1}+C=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n+C\quad(n=2,3$$

Problem

Izračunati sumu $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Rješenje.

- Koristeći jednakost (8), imamo
- $$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \Delta^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n + C = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}-1} + C = -4\left(\frac{3}{4}\right)^n + C \quad (n = 2, 3$$
- Da odredimo konstantu C, uzmimo $n = 2$:
$$\frac{3}{4} = -4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + C \Rightarrow C = 3.$$

Problem

Izračunati sumu $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Rješenje.

- Koristeći jednakost (8), imamo
- $$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\Delta^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n+C=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}-1}+C=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n+C\quad(n=2,3$$
- Da odredimo konstantu C, uzmimo $n=2$:
$$\frac{3}{4}=-4\left(\frac{3}{4}\right)^2+C\Rightarrow C=3.$$
- Dakle,
$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k=3-4\left(\frac{3}{4}\right)^n\quad(n=2,3,\ldots).$$

Da bismo izbjegli ovo dodatno izračunavanje konstante C, možemo koristiti sljedeći rezultat koji je poznat kao *fundamentalni teorem za izračunavanje određenih (konačnih) suma*, a koji je analogan fundamentalnom teoremu diferencijalnog računa (Newton-Leibnizovoj formuli za izračunavanje određenih integrala).

Teorem

Ako je y_n antidiferencija (neodređena suma) niza x_n i $n \geq m+1$, tada vrijedi

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k = [y_k]_m^n = y_n - y_m.$$

Problem

Izračunati $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Rješenje.

- Koristit ćemo jednakost: $k^2 = k(k-1) + k = k^{(2)} + k^{(1)}$. Zbog linearnosti antidiferentnog operatora, imamo

$$\Delta^{-1}k^2 = \Delta^{-1}k^{(2)} + \Delta^{-1}k^{(1)} = \frac{k^{(2)}}{2} + \frac{k^{(3)}}{3} + C$$

Problem

Izračunati $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Rješenje.

- Koristit ćemo jednakost: $k^2 = k(k-1) + k = k^{(2)} + k^{(1)}$. Zbog linearnosti antidiferentnog operatora, imamo

$$\Delta^{-1} k^2 = \Delta^{-1} k^{(2)} + \Delta^{-1} k^{(1)} = \frac{k^{(2)}}{2} + \frac{k^{(3)}}{3} + C$$

- Prema prethodnom (fundamentalnom) teoremu, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left[\frac{k^{(2)}}{2} + \frac{k^{(3)}}{3}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \frac{(n+1)^{(3)}}{3} - \frac{1^{(2)}}{2} - \frac{1^{(3)}}{3}$$

$$= \frac{(n+1)\,n}{2} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Problem

Izračunati $\sum\limits_{k=2}^{n-1} k^2(k-1)$.

Rješenje. Kako je $\sum\limits_{k=2}^{n-1} k^2(k-1) = \sum\limits_{k=2}^{n-1} kk^{(2)} = \left[\Delta^{-1}\left(kk^{(2)}\right)\right]_2^n$, koristeći parcijalno sumiranje, imamo

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}\left(kk^{(2)}\right) &= \left| \begin{array}{c} x_k = k \Rightarrow \Delta x_k = 1 \\ \Delta y_k = k^{(2)} \Rightarrow y_k = \frac{k^{(3)}}{3} \end{array} \right| = k\frac{k^{(3)}}{3} - \Delta^{-1}\frac{(k+1)^{(3)}}{3} \\
&= k\frac{k(k-1)(k-2)}{3} - \frac{(k+1)^{(4)}}{12} \\
&= \frac{4k^2(k-1)(k-2) - (k+1)k(k-1)(k-2)}{12} \\
&= \frac{k(k-1)(k-2)(3k-1)}{12},
\end{aligned}$$

pa je

$$\sum_{k=2}^{n-1} k^2 (k-1) = \left[\frac{k(k-1)(k-2)(3k-1)}{12} \right]_2^n = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{12}.$$

Problem

Izračunati sumu:

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

Rješenje. Kako je

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{8\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{8}\left(n-\frac{3}{2}\right)^{(-3)},$$

primjenom fundamentalnog teorema, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}&=\left[\frac{1}{8}\Delta^{-1}\left(k-\frac{3}{2}\right)^{(-3)}\right]_{1}^{n+1}\\&=\frac{1}{8}\left[\frac{\left(k-\frac{3}{2}\right)^{(-2)}}{-2}\right]_{1}^{n+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{16}\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)^{(-2)} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{(-2)}\right] \\
&= -\frac{1}{16}\left[\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)} - \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}.
\end{aligned}
$$

Slično metodu parcijalne integracije u integralnom računu - ovdje imamo *metod parcijalnog sumiranja* konačnih suma.

Teorem

(Metod parcijalnog sumiranja konačnih suma)
Ako je $m < n$, tada je

$$\sum_{k=m}^{n-1} x_k \Delta y_k = \left[x_k y_k\right]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} \left(\Delta x_k\right) y_{k+1}. \tag{9}$$

Primijenit ćemo ovaj metod na izračunavanje jedne vrlo zanimljive sume.

Problem

Izračunati $\sum_{k=1}^{n-1} ka^k \quad (a \neq 1)$.

Rješenje.

- Prema Teoremu parcijalnog sumiranja konačnih suma, uzimajući $x_k = k$, $\Delta y_k = a^k$ (odnosno, $y_k = \Delta^{-1} a^k = \dfrac{a^k}{a-1}$), imamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} ka^k = \left[k \frac{a^k}{a-1} \right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^{k+1}}{a-1}.$$

Problem

Izračunati $\sum\limits_{k=1}^{n-1} ka^k \quad (a \neq 1)$.

Rješenje.

- Prema Teoremu parcijalnog sumiranja konačnih suma, uzimajući $x_k = k$, $\Delta y_k = a^k$ (odnosno, $y_k = \Delta^{-1} a^k = \dfrac{a^k}{a-1}$), imamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} ka^k = \left[k \frac{a^k}{a-1} \right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^{k+1}}{a-1}.$$

- Na osnovu fundamentalnog teorema sumiranja, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^k = \left[\frac{a^k}{a-1} \right]_1^n = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a}{a-1} = \frac{a^n - a}{a-1}.$$

Problem

Izračunati $\sum_{k=1}^{n-1} ka^k \quad (a \neq 1)$.

Rješenje.

- Prema Teoremu parcijalnog sumiranja konačnih suma, uzimajući $x_k = k$, $\Delta y_k = a^k$ (odnosno, $y_k = \Delta^{-1} a^k = \frac{a^k}{a-1}$), imamo

$$\sum_{k=1}^{n-1} ka^k = \left[k \frac{a^k}{a-1} \right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^{k+1}}{a-1}.$$

- Na osnovu fundamentalnog teorema sumiranja, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n-1} a^k = \left[\frac{a^k}{a-1} \right]_1^n = \frac{a^n}{a-1} - \frac{a}{a-1} = \frac{a^n - a}{a-1}.$$

- Zbog toga je

$$\sum_{k=1}^{n-1} ka^k = \frac{na^n - a}{a-1} - \frac{a}{a-1} \cdot \frac{a^n - a}{a-1} = \frac{(a-1)\, na^n - a^{n+1} + a}{(a-1)^2}.$$

Problem

Izračunati sumu: $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+2)(k+4)}$.

Rješenje. Tražena suma se može napisati u obliku
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+3}{(k+2)(k+3)(k+4)}$, pri čemu je

$$\frac{k+3}{(k+2)(k+3)(k+4)} = (k+3)(k+1)^{(-3)}.$$

Primjenom parcijalnog sumiranja, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+3)(k+1)^{(-3)} &= \left| \begin{array}{c} x_k = k+3 \Rightarrow \Delta x_k = 1 \\ \Delta y_k = (k+1)^{(-3)} \Rightarrow y_k = -\frac{1}{2}(k+1)^{(-2)} \end{array} \right| \\ &= \left[-\frac{1}{2}(k+3)(k+1)^{(-2)} \right]_1^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+2)^{(-2)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left[\frac{1}{2}\frac{(k+3)}{(k+2)(k+3)}\right]_1^{n+1} + \left[\frac{1}{2}\Delta^{-1}(k+2)^{(-2)}\right]_1^{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left[(k+2)^{(-1)}\right]_1^{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k+3)}\right]_1^{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{n(7n+25)}{24(n+3)(n+4)}.
\end{aligned}
$$

Postoji jedan specijalni metod sumiranja koji je baziran na jednakosti za n-tu diferenciju funkcije:

$$\Delta^n x(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x(n-k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} x(i),$$

odakle slijedi

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x(i) = (-1)^n \Delta^n x(0). \tag{10}$$

Primjer

Izračunati $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i+a}{m}$.

Rješenje. Neka je $x(i) = \binom{i+a}{m}$ u jednakosti (10). Kako je $\Delta^n \binom{i+a}{m} = \binom{i+a}{m-n}$, sada iz jednakosti (10) slijedi

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i+a}{m} = (-1)^n \binom{a}{m-n}. \quad \clubsuit$$

Još jedan vrlo zanimljiv metod!!

Ako je $z = 1 + t$, odredimo odgovarajuću formu po t ekvivalentnu sa

$$1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1},$$

a zatim, koristeći to, odredimo izraz za sumu

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$$

sa članovima koji sadrže diferencije od x_0 odgovarajućeg reda.

Neka je sada $z - 1 = t$.

- Tada je
$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{(t+1)^n - 1}{t} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} t^{k-1}.$$

Neka je sada $z-1=t$.

- Tada je
$$\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{(t+1)^n-1}{t}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^{k-1}.$$
- Dakle, postoji algebarska ekvivalencija polazne jednakosti
$$1+z+z^2+...+z^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^{k-1}, \tag{11}$$
pri čemu je $t=z-1$.

Neka je sada $z-1=t$.

- Tada je
$$\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{(t+1)^n-1}{t}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^{k-1}.$$
- Dakle, postoji algebarska ekvivalencija polazne jednakosti
$$1+z+z^2+...+z^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^{k-1}, \tag{11}$$
pri čemu je $t=z-1$.
- Uzmemo li sada da je $z\equiv E$, imat ćemo $t\equiv\Delta$,pa se jednakost (11) može pisati u obliku
$$I+E+E^2+...+E^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{k-1}.$$

Pustimo sada da obje strane posljednje jednakosti djeluju na x_1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{k-1} x_1. \tag{12}$$

Uočimo sljedeće: ako su diferencije od x_1 u gornjoj jednakosti, počev od određenog reda, jednake nuli, tada se konačna suma $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ od n članova može prikazati u zatvorenoj formi čiji broj članova ne ovisi o n.

Problem

Izračunati sumu: $\sum_{k=1}^{n} k^5$.

Rješenje. Ovdje je: $x_1 = 1$, $x_2 = 32, x_3 = 243, x_4 = 1024, x_5 = 3125$, pa imamo

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= 31, \Delta x_2 = 211, \Delta x_3 = 781, \Delta x_4 = 2101,\\
\Delta^2 x_1 &= 180, \Delta^2 x_2 = 570, \Delta^2 x_3 = 1320,\\
\Delta^3 x_1 &= 390, \Delta^3 x_2 = 750,\\
\Delta^4 x_1 &= 360, \Delta^4 x_2 = 480,\\
\Delta^5 x_1 &= 120, \Delta^5 x_2 = 120,
\end{aligned}$$

te je $\Delta^6 x_1 = 0$, odnosno, $\Delta^k x_1 = 0$ za $k \geq 6$.

Primijenimo li na ovo formulu (12), dobit ćemo

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \sum_{k=1}^{6} \binom{n}{k} \Delta^{k-1} x_1 = n + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 31 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 180$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot 390 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \cdot 36$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!} \cdot 120$$
$$= \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1).$$

LITERATURA

- M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Linearne diferentne jednadžbe,* PrintCom, Tuzla, 2016.
- M. Nurkanović, *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene,* Denfas, Tuzla, 2008.

H V A L A NA PAŽNJI!