Algebarske manipulacije 1

Primjer 1 Neka su $a+b+c=0$ .Pokazati da je

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1$$

Rjesenje:

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}=\frac{a(b^2-c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=\frac{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

Primjer 2 Neka su a,b,c realni brojevi $ab+bc+ca+abc=4$,pokazati

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$$

Rjesenje:

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1 \Leftrightarrow$$

$$(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)=(a+2)(b+2)(c+2) \Leftrightarrow$$

$$ab+bc+ca+4(a+b+c)+12=abc+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+8 \Leftrightarrow$$

$$ab+bc+ca+abc=4$$

Primjer 3 Neka su a,b,c realni brojevi $a+b+c=0$,pokazati

$$(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b})\cdot(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c})=9$$

Rjesenje:

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)=0 \Rightarrow$$

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=-3abc$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0 \Rightarrow$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b})\cdot(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c})=$$

$$=\frac{a(c-a)(a-b)+b(b-c)(a-b)+c(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\cdot\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}=$$

$$=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-(a^3+b^3+c^3)-3abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}\cdot\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}=$$

$$=\frac{-3abc-3abc-3abc}{abc}\cdot(-1)=9$$

Primjer 4 Neka su a,b,c,d realni brojevi $\frac{a-b}{c-d}=2$, $\frac{a-c}{b-d}=3$, odrediti

$$\frac{a-d}{b-c}$$

Rjesenje:

$$\frac{a-d}{b-c}=\frac{\frac{a-b}{c-d}\cdot\frac{a-c}{b-d}-1}{\frac{a-b}{c-d}-\frac{a-c}{b-d}}=\frac{6-1}{2-3}=-5$$

Primjer 5 Neka su a,b,c realni brojevi ,pokazati

$$(\frac{a}{b-c})^2+(\frac{b}{c-a})^2+(\frac{c}{a-b})^2=2+(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b})^2$$

Rjesenje:

$$(\frac{a}{b-c})^2+(\frac{b}{c-a})^2+(\frac{c}{a-b})^2=2+(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b})^2\Leftrightarrow$$

$$2+2(\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)})=0\Leftrightarrow$$

$$2+2\cdot\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0\Leftrightarrow$$

$$2+2\cdot\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0\Leftrightarrow 0=0$$

Zadaci za samostalan rad

Primjer 1 Neka su a,b,c realni brojevi i

$$(a+b)(b+c)(c+a)=abc$$

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=a^3b^3c^3$$

Pokazati da je $abc=0$

Primjer 2 Neka je $x\neq 1, y\neq 1$ i

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{zx-y^2}{1-z}$$

Pokazati da je

$$\frac{yz-x^2}{1-x}=\frac{zx-y^2}{1-z}=x+y+z$$

Primjer 3 Neka za a,b,c vrijedi

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

Pokazati da je za $n\in N$

$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$$

Primjer 4 Neka je

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=6$$

Odrediti

$$\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}+\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$$

Primjer 5 Pokazati

$$\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b^2+ca)(c^2+ab)}{(b+a)(c+a)}+\frac{(c^2+ab)(a^2+bc)}{(c+b)(a+b)}=a^2+b^2+c^2$$

Primjer 6 Pokazati

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}=(a+b)(b+c)(c+a)$$

Primjer 7 Neka su a,b,c,x realni brojevi , $abc\neq 0$ i

$$\frac{xb+(1-x)c}{a}=\frac{xc+(1-x)a}{b}=\frac{xa+(1-x)b}{c}$$

Pokazati da je $x=\frac{1}{2}$ ili je $a=b=c$

Primjer 8 Neka su a,b,c rayliciti realni brojevi i

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=t$$

Pokazati da je $abc + t = 0$

Primjer 9 Neka je $a + b + c = 0$,pokazati

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Primjer 10 Neka je $a + b + c = 1, ab + bc + ca = 2, abc = 3$ .Odrediti

$$\frac{a}{a + bc} + \frac{b}{b + ca} + \frac{c}{c + ab}$$