Adnan Ibrić Oktobar 2015

Kvadratni trinom II razred

Definicija:
Izraz oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ gdje su $a \neq 0, b, c$ realni brojevi se naziva kvadratni trinom. Izraz $D = b^2 - 4ac$ je diskriminanta kvadratnog trinoma.

Stav 1:
(i)Ako je $D > 0$,tada jednačina $f(x) = 0$ ima dva realna rješenja: $x_{1,2} = \frac{-b+-\sqrt{D}}{2a}$
(ii)Ako je $D = 0$,tada jednačina $f(x) = 0$ ima jedno realno rješenje. $x = \frac{-b}{2a}$
(iii)Ako je $D < 0$,tada jednačina $f(x) = 0$ nema realnih rješenja.

Stav 2.:
(i)Za $a > 0$ kvadratni trinom dostiže minimum za $x = \frac{-b}{2a}$.
(ii)Za $a < 0$ kvadratni trinom dostiže maksimum za $x = \frac{-b}{2a}$.

Stav 3.:(Viète-ove formule)

Ako su x_1, x_2 nule kvadratnog trinoma $f(x)$,tada vrijedi da je: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Zadaci

Z1:
Riješiti jednačinu $ax^2 + 3ax + 9 = 0$ u zavisnosti od realnog parametra $a \neq 0$.

Rješenje:
Diskriminanta je $D = 9a^2 - 4 * 9a = 9a(a - 4)$.
Ako je $D > 0$ tj. $a \in (-\infty, 0) \bigcup (4, +\infty)$,jednačina ima dva rješenja: $x_{1,2} = \frac{-b+-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3a+-3\sqrt{a(a-4)}}{2a}$
Ako je $D = 0$ tj. $a = 4$ tada je rješenje jedinstveno: $x = x_1 = x_2 = \frac{-3}{2}$.
Za $D < 0$ tj. $a \in (0, 4)$ jednačina nema realnih rješenja.

Z2:
Naći sve vrijednosti parametra a tako da za nule x_1, x_2 kvadratnog polinoma $x^2 - 5ax + a - 1$ vrijedi relacija: $x_1^4 + x_2^4 = 21$.

Rješenje:
Imamo da je $x_1^4 + x_2^4 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 = 9a^2 + 12a + 4 - 2a + 2 = 9a^2 + 10a + 2 = 21 \Rightarrow a = 1$ ili $a = -19/9$.

Z3:
Naći sve realne brojeve m takve da polinom $f(x) = x^2 - 2(m - 1)x + m + 5$ ima realne i različite korijene i dokazati da u tom slučaju f ima tačno jednu nulu u intervalu $(2, 3)$.

Rješenje:
Polinom f ima realne nule akko je $D > 0$ tj. $(m + 1)(m - 4) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$. Imamo da je $f(-2)f(3) = -25(m + 1)(m - 4) > 0$ iz čega slijedi da f ima tačno jedan korijen u intervalu $(-2, 3)$.

Z4:
Neka je k količnik rješenja kvadratne jednačine $px^2 - qx + q = 0$,$p > 0, q > 0$.
Naći rješenja,u funkciji od k (ali ne i u funkciji od p, q),kvadratne jednačine
$\sqrt{p}x^2 - \sqrt{q}x + \sqrt{p} = 0$.

Rješenje:
Neka su x_1, x_2 rješenja početne kvadratne jednačine. Tada imamo da je $x_1 + x_2 = \frac{-q}{p}$ i $x_1 x_2 = \frac{q}{p} \Rightarrow$
$x_2(1+k) = \frac{-q}{p}, x_2^2 k = \frac{q}{p} \Rightarrow x_2^2(1+k)^2 = \frac{q^2}{p^2}$. Zaključujemo da je $\frac{(k+1)^2}{k} \frac{q}{p}$.
Ako su y_1, y_2 rješenja druge kvadratne jednačine,imamo da je
$y_1 + y_2 = \sqrt{\frac{q}{p}}, y_1 y_2 = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = y_1 + \frac{1}{y_1} = \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow$
$\{y_1, y_2\} = \left\{\sqrt{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$.

Z5:
Dokazati da je izraz $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4xy - 6x - 24y$ veći ili jednak -25 za sve realne brojeve x, y.

Rješenje:

Dati izraz je jednak $f(x,y) = (x-2y)^2 + (x-3)^2 + 3(y-4)^2 - 25 \geq -25$ za sve realne x, y.

Zadaci za samostalan rad:

1.Neka je $f(x)$ kvadratni trinom i a, b, c po parovima različiti realni brojevi. Ako je $f(a) = bc, f(b) = ac$ i $f(c) = ab$, naći $f(a+b+c)$.

2.Naći vezu izmedu koeficijenata a, b tako da rješenja x_1, x_2 jednačine $ax^2 + bx + 1 = 0$ zadovoljavaju relaciju:
$\frac{x_1}{x_2+2} + \frac{x_2}{x_1+2} = 1$.

3.Naći sve moguće vrijednosti parametra a tako da za rješenja x_1, x_2 jednačine $x^2 + x + a = 0$ vrijedi:
$x_1^3 + x_2^3 + x_1 + x_2 > 0$.

4.Naći sve cijele brojeve a za koje jednačina
$x^4 + 2x^3 + (a^2 - a - 9)x^2 - 4x + 4 = 0$
ima bar jedan realan korijen.

5.Dati su različiti realni brojevi a, b, c, d takvi da su a i b korijeni jednačine $x^2 - 3cx - 8d = 0$ a c i d su korijeni jednačine $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Izračunati vrijednost zbira $a + b + c + d$.
