Zadaci za samostalni rad
3. i 4. razred

Problem 1. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$x^4y^3(y-x)=x^3y^4-216.$$

Problem 2. Odrediti sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takve da za svaka dva realna broja x,y vrijedi jednakost

$$(x+y)(f(x)-f(y))=f\left(x^2\right)-f\left(y^2\right).$$

Problem 3. Dat je jednakokraki oštrougli trougao ABC u kome je $\angle B=\angle C$. Sa O označimo centar opisane kružnice trougla ABC, a sa H njegov ortocentar. Dokazati da centar kružnice opisane oko trougla BOH leži na stranici AB.

Problem 4. Odrediti najmanji prirodan broj k takav da bilo koji $k-$elementni podskup skupa $A=\{1,2,\ldots,25\}$ sadrži dva različita elementa x,y takva da je $\frac{2}{3}\leq\frac{x}{y}\leq\frac{3}{2}$.

Problem 5. Ukoliko su $0\leq x,y,z\leq 1$ realni brojevi odrediti maksimalnu vrijednost izraza

$$x+y+z-xy-yz-zx$$

kao i sve trojke (x,y,z) za koje se ta vrijednost dostiže.

Problem 6. Neka su d i d' dva djelioca prirodnog broja n takva da je $d'>d$. Dokazati da tada također vrijedi i $d'>d+\frac{d^2}{n}$.

Problem 7. Dat je trougao ABC sa cjelobrojnim dužinama stranica. Simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B i visina iz vrha C sijeku se u tački P koja leži u unutrašnjosti trougla ABC. Dokazati da je $\frac{S_{APB}}{S_{APC}}$ racionalan broj, pri čemu S_{XYZ} označava površinu trougla XYZ.

Problem 8. U trouglu ABC je $\angle C = 60^\circ$. Tačke D, E i F leže na stranicama BC, AB i AC, respektivno, tako da je četverougao $CDEF$ romb. Dokazati da je $DF^2 = DM \cdot DA$, gdje je M presječna tačka pravih AD i BF.

Problem 9. Za proizvoljan prirodan broj n dokazati da ne postoji n različitih prirodnih brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_n$ takvih da je $n+x^2$ potpun kvadrat za sve $x \in \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$.

Problem 10. Dat je trougao ABC u kome je $AC > AB$, D podnožje normale iz vrha A na stranicu BC, a E podnožje normale iz tačke D na stranicu AC. Na pravoj DE je izabrana tačka F tako da vrijedi $EF \cdot DC = BD \cdot DE$. Dokazati da je AF okomito na BF.

Problem 11. Brojevi $1, 2, 3, \ldots, 1110, 1111$ su ispisani na tabli. Igrači X i Y naizmjenično brišu po jedan broj sa table sve dok na njoj ne ostanu dva broja, označimo ih sa a i b, pri čemu je $a > b$. Cilj igrača X je da razlika $a - b$ bude što veća, dok je cilj igrača Y da ova razlika bude što manja. Odrediti sve moguće vrijednosti $a - b$ ukoliko je poznato da igrači X i Y igraju najbolje moguće i da X ima prvi potez.

Problem 12. Svi prosti brojevi zapisani su u niz $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tako da je $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11 \; \ldots$. Naći sve parove (a, b) prirodnih brojeva takvih da je $a - b \geq 2$ i da $p_a - p_b$ dijeli $2\,(a - b)$.

Problem 13. Ukoliko za cijele brojeve x, y veće od 1 vrijedi jednakost $2x^2 - 1 = y^{15}$, dokazati da je x djeljiv sa 5.

Problem 14. Dokazati da za realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijedi nejednakost

$$|\sin a_1| + |\sin a_2| + \ldots + |\sin a_n| + |\cos(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| \geq 1.$$

Problem 15. Dat je trougao ABC u kome je $AB < AC$. Sa I označimo centar upisane kružnice trougla ABC, a sa M sredinu stranice BC. Neka je D tačka presjeka pravih IM i AB, a E tačka presjeka prave CI i normale iz B na AI. Dokazati da je $DE \parallel AC$.

Napomena: Rješenja i sva pitanja vezana za formulaciju zadataka slati na e-mail: *salemmalikic05@gmail.com.*