RAZNI ZADACI

Zadaci za 1. i 2. razred

Salem Malikić, 14. februar 2013.

Zadatak 1. Na stranicama AB i AD kvadrata $ABCD$ uzete su proizvoljne tačke E i F, respektivno. Sa P označimo tačku presjeka duži EF i dijagonale AC. Dokazati

- $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{AP}$
- $AP^2 \leq \frac{AE \cdot AF}{2}$

Zadatak 2. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje su brojevi $a^3 + 6ab + 1$ i $b^3 + 6ab + 1$ potpuni kvadrati.

Zadatak 3. Petougao $ABCDE$ upisan je u kružnicu. Udaljenosti tačke E od pravih AB, BC i CD su a, b i c, respektivno. Izračunati udaljenost tačke E od prave AD.

Zadatak 4. Dokazati da sistem jednačina

$$a^2 - b = c^2$$

$$b^2 - a = d^2$$

nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Zadatak 5. Naći sve prirodne brojeve a, b, c takve da je $ab + bc + ca$ prost i vrijedi jednakost

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}$$

Zadatak 6. Naći sve vrijednosti parametra a za koje nejednakost

$$2ax^2 + 2ay^2 + 4axy - 2xy - y^2 - 2x + 1 \geq 0$$

vrijedi za sve realne brojeve x i y.

Zadatak 7. Dat je pravougaonik $ABCD$. Na duži AB izabrane su tačke E i F takve da je $AE = EF$. Prava koja sadrži tačku E i okomita je na AB siječe dijagonalu AC u tački G. Sa H označimo tačku presjeka duži FD i BG. Dokazati da trouglovi FBH i GHD imaju jednake površine.

Zadatak 8. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y$$

Zadatak 9. Ako su m i n nenegativni cijeli brojevi takvi da je $m > 1$ i $2^{2m+1} \geq n^2$ dokazati da je $2^{2m+1} \geq n^2 + 7$.

Zadatak 10. Dokazati identitet

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)} =$$
$$\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}$$

Zadatak 11. Trgovac preko rijeke mora da preveze: sir, miša, pacova, mačku, psa, vuka i medvjeda. U čamcu ima mjesta za samo k od tih 7 objekata. Ako ostavi miša sa sirom, miš će ga pojesti. Ako ostavi pacova sa mišem ili sirom pacov će ih pojesti. Ako ostavi mačku sa pacovom ili mišem ona će ih pojesti. Ako ostavi psa sa pacovom ili mačkom on će ih ubiti. Ako ostavi vuka sa psom ili mačkom on će ih ubiti. Ako ostavi medvjeda sa psom ili vukom on će ih ubiti. Pretpostavlja se da trgovac sve ove događaje sprečava da se dese kad je prisutan. Koje minimalno k garantuje da on može sve artikle bezbjedno da prebaci na drugu stranu rijeke?

Zadatak 12. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$8(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq 9\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$$

Zadatak 13. Krugovi S_1 i S_2 dodiruju se izvana u tački F. Zajednička tangenta l krugova S_1 i S_2 dodiruje ih u tačkama A i B, respektivno. Prava paralelna sa l, dodiruje S_2 u tački C i siječe S_1 u dvije (različite) tačke. Dokazati da su tačke A, F i C kolinearne.

Zadatak 14. Na tabli je napisano n prirodnih brojeva. Dozvoljeno je obrisati bilo koja dva broja a i b i umjesto njih na tablu napisati broj $\frac{a+b}{4}$. Ukoliko pomenutu operaciju izvršimo $n-1$ puta na tabli će ostati samo jedan broj. Dokazati da, ukoliko su na početku svih n brojeva jednaki 1, preostali broj nije manji od $\frac{1}{n}$.

Zadatak 15. Na pravoj se nalazi n različitih plavih i n različitih žutih tačaka. Dokazati da suma dužina svih mogućih duži čija su oba kraja iste boje i pripadaju pomenutom skupu tačaka nije veća od sume dužina svih mogućih duži čija su oba kraja različite boje (i pripadaju pomenutom skupu tačaka).

Napomena: Sva pitanja vezana za formulaciju zadataka i eventualna rješenja slati na e-mail *salemmalikic05@gmail.com*.