RAZNI ZADACI

Zadaci za 3. i 4. razred

Salem Malikić, 11. februar 2013.

Zadatak 1. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi iz intervala $(0,1)$. Odrediti najveću vrijednost sume

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[6]{a_i\left(1-a_{i+1}\right)}$$

Zadatak 2. Odrediti sve četvorke (a, b, n, p) prirodnih brojeva takvih da je p prost i

$$a^3+b^3=p^n$$

Zadatak 3. Za skup S označimo sa P_S proizvod svih njegovih elemenata. Odrediti za koje prirodne brojeve n je skup $A=\{1,2,\ldots 2n\}$ moguće podijeliti u dva podskupa B i C takva da je $B \cap C=\emptyset$, $B \cup C=A$ i P_B-P_C je jednako 1 ili 2.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je

$$n^4-4n^2+22n^2-36n+18$$

potpun kvadrat.

Zadatak 5. Dat je trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ takav da na stranicama AD i BC postoje tačke P i Q, respektivno, takve da je $\angle APB=\angle CPD$ i $\angle AQB=\angle CQD$. Dokazati da su tačke P i Q jednako udaljena od presječne tačke dijagonala trapeza $ABCD$.

Zadatak 6. Prirodni brojevi a, b, c su takvi da

$$a \mid b + c + bc, \quad b \mid c + a + ca, \quad c \mid a + b + ab$$

Ukoliko su a, b, c po parovima različiti dokazati da bar jedan od njih nije prost.

Zadatak 7. Dokazati da za nenegativne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leq 2\left(x + y + z\right)$$

Zadatak 8. Na horizontalnoj pravoj izabrano je 2013 tačaka i svaka je obojena crnom ili plavom bojom. Za svaku tačku A je izračunat zbir broja plavih tačaka koje se nalaze desno od A i broja crnih tačaka koje se nalaze lijevo od A. Na kraju se ispostavilo da se među 2013 tako dobijenih suma tačno jedan broj pojavljuje neparan broj puta. Naći sve moguće vrijednosti tog broja.

Zadatak 9. Naći sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da je za svaka dva pozitivna realna broja x i y ispunjena jednakost

$$x^2 \left(f\left(x\right) + f\left(y\right)\right) = \left(x + y\right)\left(f\left(x\right) y\right)$$

Zadatak 10. Riješiti jednačinu

$$\sin\frac{\alpha - \beta}{2} + \sin\frac{\alpha - \gamma}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} = \frac{3}{2}$$

gdje su α, β i γ uglovi trougla.

Zadatak 11. Na stranicama AB i AD kvadrata $ABCD$ izabrane su tačke K i N, respektivno, tako da vrijedi $AK \cdot AN = 2BK \cdot DN$. Prave CK i CN sijeku dijagonalu BD u tačkama L i M. Dokazati da su tačke K, L, M, N i A konciklične.

Zadatak 12. Odrediti sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva takve da $abc + 1$ dijeli $a^2 + b^2$.

Zadatak 13. Na stolu se nalazi 98 štapića čije su dužine redom $1, 2, \ldots, 98$. Osobe A i B igraju sljedeću igru u kojoj naizmjenično uklanjaju po jedan štapić sa stola sve dok na stolu ne ostanu tačno 3 štapića. Ukoliko osoba A ima prvi potez odrediti koja od osoba ima pobjedničku strategiju.

Zadatak 14. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c, p vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^p}+\frac{b^3c}{(3b+c)^p}+\frac{c^3a}{(3c+a)^p} \geq \frac{a^2bc}{(2a+b+c)^p}+\frac{b^2ca}{(2b+c+a)^p}+\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p}$$

Zadatak 15. Tačka D je središte hipotenuze AB pravouglog trougla ABC a tačka M je izabrana tako da je $MB \perp AB$, tačke M i C leže sa iste strane prave AB, tačka presjeka prave MD i duži AC, označimo je sa N, leži na duži AC a tačka presjeka prave MC i duži AB, označimo je sa E, leži na duži AB. Dokazati da je $\angle DBN = \angle BCE$.

Napomena: Sva pitanja vezana za formulaciju zadataka i eventualna rješenja slati na e-mail $salemmalikic05@gmail.com$.