

KVADRATNI TRINOM

Zadaci za 2. razred

Salem Malikić

Zadatak 1. Neka je $f(x) = x^2 + (2a - 1)x - a - 3$, gdje je a realan parametar.

a) Dokazati da jednakost $f(x) = 0$ ima dva različita realna korijena x_1 i x_2 .

b) Naći sve vrijednosti a za koje je $x_1^3 + x_2^3 = -72$.

Zadatak 2. Naći sve realne brojeve a takve da korijeni x_1 i x_2 jednakosti

$$x^2 + 6x + 6a - a^2 = 0$$

zadovoljavaju jednakost $x_2 = x_1^3 - 8x_1$.

Zadatak 3. Neka je $m \in \mathbb{R}$ takav da jednačina

$$x^2 - 2(m - 1)x + m + 5 = 0$$

ima realne i različite korijene. Dokazati da je tačno jedan korijen ove jednačine u intervalu $(-2, 3)$.

Zadatak 4. Naći sve parove (a, b) nenegativnih realnih brojeva takvih da jednakosti $x^2 + a^2x + b^3 = 0$ i $x^2 + b^2x + a^3 = 0$ imaju zajednički realan korijen.

Zadatak 5. Naći sve realne brojeve p i q takve da su korijeni jednačine $x^2 + px + q = 0$ jednaki D i $1 - D$, gdje je D diskriminanta ove jednačine.

Zadatak 6. Dva igrača igraju sljedeću igru: prvi igrač upisuje jedan od koeficijenata kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c$ (tj. mijenja jedan od brojeva a, b, c sa nekim konkretnim, po volji odabranim, brojem) s tim da je upisani koeficijent različit od nule. Potom drugi igrač zamjenjuje jednu od dvije preostale nepoznate (misli se na nepoznate a, b, c) nekim brojem različitim od nule i na kraju prvi igrač zamjenjuje i preostalu, treću, nepoznatu nekim brojem različitim od nule. Prvi igrač pobjeđuje ako jednačina ima jedno pozitivno i jedno negativno rješenje. U suprotnom pobjeđuje drugi igrač. Koji od igrača ima pobjedničku strategiju? Odgovor obrazložiti.

Zadatak 7. Naći sve realne brojeve a za koje jednakost

$$x^2 + ax + 3a^2 - 7a - 19 = 0$$

ima realne korijene x_1 i x_2 koji zadovoljavaju jednakost

$$\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = -\frac{2a}{13}$$

Zadatak 8. Dati su različiti realni brojevi a, b, c, d takvi da su a i b korijeni jednačine $x^2 - 3cx - 8d = 0$ a c i d su korijeni jednačine $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Izračunati vrijednost zbira $a + b + c + d$.

Zadatak 9. Neka je k količnik korijena kvadratne jednačine

$$px^2 - qx + q = 0, \quad p > 0, \quad q > 0$$

Naći, u funkciji od k (ali ne i od p i q) korijene jednačine

$$\sqrt{p}x^2 - \sqrt{q}x + \sqrt{p} = 0$$

Zadatak 10. Neka je $f(x) = x^2 + 6ax - a$, gdje je a realan parametar.

a) Naći sve vrijednosti a za koje jednakost $f(x) = 0$ ima barem jedan realan korijen.

b) Ako su x_1 i x_2 korijeni jednačine $f(x) = 0$ (ne moraju biti različiti) naći najmanju vrijednost izraza

$$A = \frac{9a - 4a^2}{(1 + x_1)(1 + x_2)} - \frac{70a^3 + 1}{(1 - 6a - x_1)(1 - 6a - x_2)}$$

Zadatak 11. Neka je $f(x)$ kvadratni trinom i a, b, c po parovima različiti realni brojevi. Ako je $f(a) = bc$, $f(b) = ac$ i $f(c) = ab$, naći $f(a + b + c)$.

Zadatak 12. Neka je $a \in \mathbb{R}$ i funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(x) = ax^2 + x + 1$$

Odrediti sve vrijednosti parametra a , tako da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi nejednakosti

$$f(f(x)) \geq 0$$

Zadatak 13. Naći sve cijele brojeve a za koje jednačina

$$x^4 + 2x^3 + (a^2 - a - 9)x^2 - 4x + 4 = 0$$

ima bar jedan realan korijen.

Zadatak 14.* Ukoliko su a i b realni brojevi i $a \leq b$ dokazati nejednakost:

$$a^3 - 12a - 16 \leq b^3 - 12b + 16$$

Zadatak 15.** Naći sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva koje zadovoljavaju jednakost

$$abc + ab + c = c^3$$