RAZNI ZADACI

Zadaci za 3. i 4. razred

Salem Malikić

Zadatak 1. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$1 + x^2y = x^2 + 2xy + 2x + y$$

Zadatak 2. Neka su $ABCD$ i $AEFG$ pravougaonici takvi da su tačke B, E, D i G kolinearne (u ovom poretku).Neka se prave BC i GF sijeku u T i neka se DC i EF sijeku u H. Dokazati da su A, H i T kolinearne.

Zadatak 3. Dat je jednakostranični trougao $\triangle ABC$. Tačke K i L su izabrane na stranicama AB i AC , respektivno , tako da vrijedi $BK = AL$. Neka je P tačka presjeka segmenata BL i CK . Odrediti omjer $AK : KB$ ukoliko je poznato da je AP okomito na CK.

Zadatak 4. U trouglu ABC, AD je simetrala ugla BAC a I_1 i I_2 su centri kružnica upisanih u trouglove ABD i ADC, respektivno. Dokazati da se AD, BI_2 i CI_1 sijeku u jednoj tački.

Zadatak 5. Neka su x, y, z prirodni brojevi a p prost broj takav da je $0 < x < y < z < p$ i brojevi x^3, y^3 i z^3 daju iste ostatke pri dijeljenju sa p. Dokazati da $x + y + z \mid x^2 + y^2 + z^2$.

Zadatak 6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi čija je suma jednaka 3. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+3}{3a+bc} + \frac{b+3}{3b+ca} + \frac{c+3}{3c+ab} \geq 3$$

Zadatak 7. Na krugu je smješteno 20 jedinica i 30 dvojki tako da nikoja tri uzastopna broja nisu jednaki. Naći sumu proizvoda svih triju uzastopnih brojeva.

Zadatak 8. Neka su a i b prirodni brojevi i $a > b > 1$. Ukoliko $a + b \mid ab + 1$ i $a - b \mid ab - 1$ dokazati da je $a < \sqrt{3}b$.

Zadatak 9. Neka je $ABCD$ konveksan četverougao takav da AB i CD nisu paralelne i $AB = CD$. Sa E i F označimo sredine dijagonala AC i BD , respektivno. Prava EF siječe segmente AB i CD u tačkama G i H , respektivno. Dokazati da je $\angle DHG = \angle AGH$.

Zadatak 10. Riješiti u skupu nenegativnih realnih brojeva sistem jednačina

$$x^2y^2 + 1 = x^2 + xy$$
$$y^2z^2 + 1 = y^2 + yz$$
$$z^2x^2 + 1 = z^2 + zx$$

Zadatak 11. Naći sve parove (m, n) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednačinu:

$$(m + n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn$$

Zadatak 12. Neka je ABC trougao i I_a centar pripisane kružnice u odnosu na vrh A. Neka su P i Q tačke dodira pripisane kružnice sa centrom u $I_a$sa pravima AB i AC. Prava PQ siječe I_aB i I_aC u tačkama D i E, respektivno. Neka je A_1 tačka presjeka pravih DC i BE. Na analogan način definišimo i tačke B_1, C_1. Dokazati da se prave AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj tački.

Zadatak 13. Naći sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x)\, f(y) - f(xy) = x + y$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 14. Naći sve nenegativne cijele brojeve a, b, c, d koji zadovoljavaju jednakost

$$7^a = 4^b + 5^c + 6^d$$

Zadatak 15. Posmatrajmo kvadrat dimenzija $n \times n$ podijeljen na n^2 jediničnih kvadratića od kojih je svaki crne ili bijele boje. Od 4 kvadratića koja se nalaze na ćoškovima ovog kvadrata 3 su bijela a preostali,četvrti, je crn. Dokazati da se u ovom kvadratu može naći kvadrat dimenzija 2×2 koji sadrži neparan broj bijelih jediničnih kvadratića.

Zadatak 16. Naći sve parove (x, y) prirodnih brojeva takve da je $x + y = a^n$ i $x^2 + y^2 = a^m$ za neke prirodne brojeve a, n, m.

Zadatak 17. Dat je oštrougli trougao ABC sa ortocentrom H i centrom opisanog kruga O. Neka simetrala duži AH siječe stranice AB i AC u tačkama D i E, redom. Dokazati da je A centar spolja pripisane kružnice trougla ODE.

Zadatak 18. Dokazati da zbir kvadrata tri uzastopna cijela broja ne može biti jednak zbiru kubova dva uzastopna cijela broja.

Zadatak 19. U skupu realnih brojeva riješiti sistem jednačina

$$x + y = 1$$
$$\left(x^4 + y^2\right)\left(x^2 + y^4\right) = 85$$

Zadatak 20. Tačke D i E leže na stranici AB trougla ABC i zadovoljavaju jednakost

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2$$

Dokazati da je $\angle ACD = \angle BCE$.

Zadatak 21. Naći najmanji broj k takav da bilo koji $k-$elementni podskup skupa $\{1, 2, \ldots, 11\}$ sadrži nekoliko brojeva čija je suma djeljiva sa 11.

Zadatak 22. Naći sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x > y > z$ vrijedi jednakost

$$f(x - y + z) = f(x) + f(y) + f(z) - xy - yz + zx$$

Zadatak 23. Data je kvadratna ploča $2^n \times 2^n$ koja je popločana jediničnim kvadratićima. Iz te ploče izbačen je jedan kvadratić. Dokazati da se ostatak ploče može popločati L figurama (bez preklapanja L figura i bez toga da se dio neke od L figura nalazi van velike ploče) gdje pod L figurom smatramo svaku od figura koje se dobijaju izbacivanjem tačno jednog kvadratića iz kvadrata dimenzija 2×2 (tj. L figura ima tačno 3 jedinična kvadratića).

Zadatak 24. Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cijeli brojevi takvi da je bar jedan od njih različit od nule i svaki je veći ili jednak -1. Ukoliko je poznato da je

$$a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^n a_n = 0$$

dokazati da je $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0$

Zadatak 25. Neka su x i y cijeli brojevi različiti od -1. Ukoliko je

$$\frac{x^4 - 1}{y + 1} + \frac{y^4 - 1}{x + 1}$$

cio, dokazati da je $x^4y^{44} - 1$ djeljivo sa $x + 1$.