KOMBINATORIKA 1

Zadaci za 3. i 4. razred

Salem Malikić

Zadatak 1. Naći sve skupove B i C takve da je $B \cup C = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $B \cap C = \oslash$ i proizvod elemenata skupa C jedna sumi elemenata skupa B.

Zadatak 2. Neka je A podskup skupa $\{1, 2, \ldots, 2009\}$ takav da A sadrži barem 1010 elemenata. Dokazati da se u A uvijek može naći broj koji je stepen dvojke ili dva broja čija je suma stepen dvojke.

Zadatak 3. U nekom razredu koji ima 33 učenika svakom učeniku je postavljeno pitanje koliko još učenika u razredu ima njegovo ime kao i pitanje koliko njih imaju njegovo prezime. Na kraju se ispostavilo da se među odgovorima pojavio svaki broj od 0 do 10 . Dokazati da postoje dva učenika u razredu koji imaju isto ime i prezime.

Zadatak 4. Dokazati da se skup od 18 uzastopnih cijelih brojeva ne može podijeliti na skupove A i B takva da je $A \cap B = \oslash$ i proizvod elemenata skupa A je jednak proizvodu elemenata skupa B. (Uputstvo: posmatrati djeljivost sa 19 a potom iskoristiti $Wilsonovu$ teoremu).

Zadatak 5. Dat je prirodan broj $n \geq 3$. Naći broj aritmetičkih progresija od 3 elementa, čija su sva 3 elementa iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Zadatak 6. Zadano je 10 dužina takvih da je svaka od njih duža od 1cm a kraća od 55cm. Dokažite da među njima postoje tri dužine od kojih se može konstruisati trougao.

Zadatak 7. Dat je prirodan broj n. Odrediti broj podskupova A skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ takvih da u A ne postoje x i y takvi da je $x + y = 2n + 1$.

Zadatak 8. Na šahovskom turniru svaki od igrača je igrao po dvije utakmice sa svakim od preostalih igrača i to jednom sa crnim a drugi put sa bijelim figurama(tj. dva proizvoljna igrača A i B, $A \neq B$, su jedan protiv drugog igrali dvaput i to jednom je A igrao sa crnim a drugi put je B igrao sa crnim figurama). Za pobjedu pobjednik dobija 1 bod dok u slučaju neriješenog rezultata oba igrača dobijaju po 0.5 bodova. Ispostavilo se da na kraju turnira svi igrači imaju jednak broj bodova.
(a) Dokazati da postoje dva igrača koji imaju jednak broj neriješeno odigranih utakmica
(b) Dokazati da postoje dva igrača koji imaju jednak broj poraza u utakmicama koje su odigrali sa bijelim figurama

Zadatak 9. Na jednom takmičenju svaki učesnik se bori sa svakim i nijedna borba se ne završava neriješeno. Dokazati da među takmičarima postoji takav koji će imenovati sve učesnike, osim sebe, kada imenuje sve učesnike koje je pobijedio, a također i učesnike koji su pobijeđeni od ranije navedenih.(Uputstvo: prisjetiti se ekstremalnog principa sa predavanja, zadatak o teniskom turniru i tri igrača A, B, C takva da je A pobijedio B, B pobijedio C i C pobijedio A).

Zadatak 10. U razredu ima 25 učenika. Dokazati da se od njih ne može formirati više od 30 košarkaških ekipa sa po 5 igrača u svakoj, ako ma koje dvije od njih nemaju više od jednog igrača koji je član obje ekipe.

Zadatak 11. Dvadesetoro djece pohađa seosku osnovnu školu. Svaka dva djeteta imaju zajedničkog djeda. Dokažite da jedan od djedova ima najmanje 14 unučadi u toj školi.

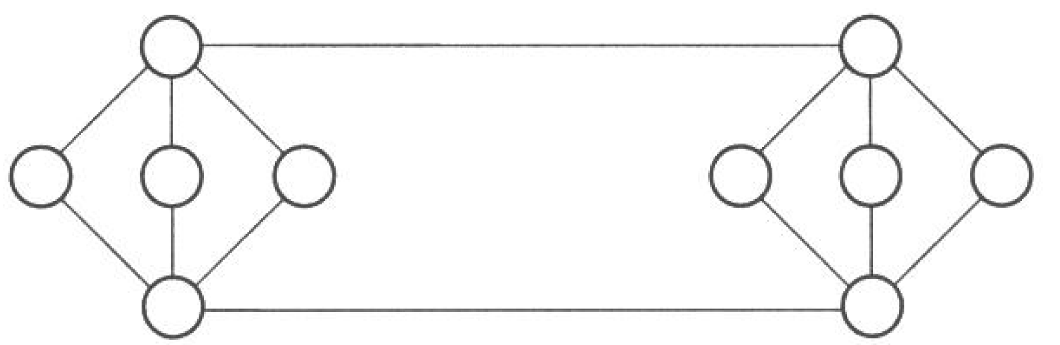
Zadatak 12. Neka je A skup prirodnih brojeva takav da je

$$|x-y| \geq \frac{xy}{25}$$

za bilo koja dva elementa $x, y \in A$. Dokazati da skup A ne sadrži više od 9 elemenata. Dati primjer da postoji skup A od 9 elemenata koji zadovoljava uslove zadatka.

Zadatak 13. Odrediti najmanji broj boja takav da je brojeve od 1 do 2004 moguće obojiti ovim bojama a da pri tome ne postoji trojka (a, b, c) brojeva takvih da je $a < b < c$,a dijeli b, b dijeli c i brojevi a, b, c su iste boje. (Odgovor: 6).

Zadatak 14. Iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 13, 14\}$ trebamo izabrati 10 brojeva koje potom treba upisati u kružiće na datom dijagramu (u svaki kružić po jedan broj). Da li je ovo moguće izvesti a da pri tome apsolutna vrijednost svake dvije razlike brojeva koji se nalaze u susjednim kružićima (kružići su susjedni ukoliko postoji prava koja ih spaja i koja ne sadrži niti jedan kružić) budu različite.



Zadatak 15. U kvadratnu tablu 9×9 upisani su svi brojevi od 1 do 81 (u nekom poretku). Dokazati da se uvijek može naći $k \in \{1, 2, \ldots 9\}$ takvo da se proizvod svih brojeva k-tog reda razlikuje od proizvoda svih brojeva k-te kolone.