RAZNI ZADACI - RJEŠENJA

Zadaci za 1. i 2. razred

(zadaci objavljeni 2. januara 2013.)

Zadatak 1. U skupu realnih brojeva riješiti sistem jednačina

$$a+b=1$$
$$\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)=a^4+b^4.$$

Rješenje: Imamo

$$\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)=a^4+b^4 \Leftrightarrow$$

$$\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)=\left(a^4+b^4\right)(a+b) \Leftrightarrow$$

$$\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)(a+b)=\left(a^4+b^4\right)(a+b) \Leftrightarrow$$

$$(a+b)\left[a^4+b^4-\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$ab\,(a-b)^{\,2}\,(a+b)=0.$$

Iz posljednje jednačine zaključujemo da bar jedan od faktora na lijevoj strani mora biti jednak nuli. Kako je $a+b=1\neq 0$ to imamo da je $a=0$ ili $b=0$ ili $a=b$. Jednostavnom provjerom svakog od ovih slučajeva nalazimo da dati sistem ima sljedeća rješenja:

$$(a,b)\in\left\{(0,1)\,,(1,0)\,,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Zadatak 2. U pravouglom trouglu ABC tačka M je uzeta na kateti BC tako da vrijedi $BM = 2 \cdot MC$. Tačka K je sredina hipotenuze AB. Dokazati da je $\angle BAM = \angle MKC$.

Rješenje: Tačka K je centar kružnice opisane oko $\triangle ABC$ odakle slijedi da je $KC = KB$, pa vrijedi $\measuredangle ABM = \measuredangle KCM$. Iz jednakosti $\frac{AB}{KC} = \frac{BM}{CM}$ slijedi da je $\triangle AMB \sim \triangle CMK$. Iz ove sličnosti trouglova zaključujemo da je $\measuredangle BAM = \measuredangle MKC$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3. Brojevi $y_1, y_2, \ldots, y_{25}$ predstavljaju proizvoljnu permutaciju prirodnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$. Dokazati da je broj

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\ldots(x_{25} - y_{25})$$

paran.

Rješenje: Pretpostavimo suprotno tvrdnji zadatka, tj. da je

$$\prod_{i=1}^{25} (x_i - y_i)$$

neparan broj. Tada je za svako $i \in \{1, 2, 3, ..., 25\}$ broj $x_i - y_i$ neparan, pa postoje cijeli brojevi k_i takvi da je

$$x_i - y_i = 2k_i + 1.$$

Iz ovog dalje imamo

$$\sum_{i=1}^{25} x_i - \sum_{i=1}^{25} y_i = 25 + 2\sum_{i=1}^{25} k_i.$$

Kako su brojevi $y_1, y_2, \ldots, y_{25}$ permutacija brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ to je

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = \sum_{i=1}^{25} y_i,$$

odakle slijedi da je

$$0 = 25 + 2\sum_{i=1}^{25} k_i,$$

što dalje implicira

$$2\sum_{i=1}^{25} k_i = -25,$$

što je nemoguće jer su k_i cijeli brojevi, pa je lijeva strana posljednje jednakosti paran broj te stoga ne može biti jednaka -25. Iz ovog slijedi da je naša pretpostavka netačna, te je ovim dokaz završen.

Zadatak 4. Neku osnovnu školu pohađa 40 učenika. Ako je poznato da svaka dva učenika imaju zajedničkog djeda dokazati da postoji djed koji u školi ima bar 21 unuče.

Rješenje: Neka su $a_1, a_2, ..., a_{40}$ svi učenici škole. Neka su d_1, d_2 dva djeda učenika a_1. Kako svaki od preostalih 39 učenika ima zajedničkog djeda sa a_1, jedan od djedova d_1 i d_2 mora imati bar 20 unučadi među ovih 39 učenika. Uključujući a_1 zaključujemo da ovaj djed ima bar 21 unuče u školi.

Zadatak 5. U oštrouglom trouglu ABC ugao kod vrha C jednak je $45°$. Tačke A_1 i B_1 su podnožja visina iz vrhova A i B, respektivno. Sa H označimo ortocentar trougla ABC. Na segmentima AA_1 i BC izabrane su tačke D i E, respektivno, tako da vrijedi $A_1D = A_1E = A_1B_1$. Dokazati da vrijede sljedeće jednakosti

- $A_1B_1 = \sqrt{\frac{A_1B^2 + A_1C^2}{2}}$
- $CH = DE$.

Rješenje: Kako je $\angle BCA = \frac{\pi}{4}$ to je $\angle CBB_1 = \angle CAA_1 = \frac{\pi}{4}$, odakle slijedi $\angle AHB_1 = \angle BHA_1 = \frac{\pi}{4}$. Dakle, vrijedi $BA_1 = HA_1$ i $AA_1 = CA_1$. Iz pravouglog trougla A_1BH je $BH = A_1H \cdot \sqrt{2}$. Kako je četverougao A_1BAB_1 tetivni to vrijedi

$$\triangle A_1B_1H \sim \triangle ABH \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1H}{BH} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dakle, vrijedi jednakost $A_1B_1^2 = \frac{AB^2}{2}$. Iz pravouglog trougla $\triangle ABA_1$ imamo

$$AB^2 = BA_1^2 + A_1A^2 = A_1B^2 + A_1C^2,$$

pa je

$$A_1B_1^2 = \frac{AB^2}{2} = \frac{A_1B^2 + A_1C^2}{2}$$

i ovim smo dokazali prvu jednakost. Dalje, iz pravouglih trouglova EA_1D i CA_1H imamo

$$ED^2 = 2A_1B_1^2 = BA_1^2 + A_1C^2 = A_1H^2 + A_1C^2 = CH^2,$$

odakle slijedi $CH = ED$.

Zadatak 6. Neka su a, b, c, d četiri različita prirodna broja čiji je proizvod potpun kvadrat. Dokazati da se broj $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ može napisati kao suma kvadrata pet prirodnih brojeva.

Rješenje: Bez narušavanja opštosti možemo pretpostaviti da je $a > b > c > d$. Neka je $abcd = t^2$, za neki prirodan broj t. Imamo

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2a^2b^2 + 2c^2d^2 =$$

$$= \left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(c^2 - d^2\right)^2 + 2\left(ab - cd\right)^2 + 4abcd =$$

$$= \left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(c^2 - d^2\right)^2 + \left(ab - cd\right)^2 + \left(ab - cd\right)^2 + \left(2t\right)^2,$$

a posljednji izraz je očigledno suma kvadrata pet prirodnih brojeva, te je ovim dokaz završen.

Zadatak 7. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$ dokazati da vrijedi nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c.$$

Rješenje: Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3,$$

$$x^4 + 3 = x^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{x^4} = 4x.$$

Koristeći ove nejednakosti imamo

$$a^4 + b^4 + c^4 = \left(a^4 + 3\right) + \left(b^4 + 3\right) + \left(c^4 + 3\right) - 9 \geq$$

$$\geq 4a + 4b + 4c - 9 = a + b + c + 3(a + b + c - 3) \geq$$

$$\geq a + b + c.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = 1$.

Zadatak 8. Neka je a prirodan broj i M skup ostataka dobijenih pri dijeljenju broja a sa svakim od prirodnih brojeva koji su manji od a (ukoliko se neki ostatak pojavljuje više puta kao npr. u slučaju $a = 7$ kada se ostatak 1 pojavljuje pri dijeljenju broja a sa 2, ali također i pri dijeljenju broja a sa 3 i 6, tada takav ostatak u skup M ubrajamo samo jedanput pa tako za $a = 7$ imamo $M = \{0, 1, 2, 3\}$). Naći sve $a > 1$ za koje je zbir elemenata skupa M jednak a.

Rješenje: Razmotrit ćemo dva moguća slučaja.

- Broj a je paran. Neka je $a = 2k$.

Uočimo da dijeljenjem broja a sa brojevima $\{k, k+1, \ldots, 2k-1\}$ dobijamo skup ostataka $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. Za svaki od brojeva $x < k$ pri dijeljenju broja a sa x dobijamo ostatak koji nije veći od $x-1 \leq k-1$, pa stoga zaključujemo da je u ovom slučaju $M = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. Zbir elemenata skupa M je jednak $\frac{(k-1)k}{2}$ i imamo jednačinu

$$\frac{(k-1)\,k}{2} = 2k,$$

odakle slijedi $\frac{k-1}{2} = 2 \;\Rightarrow\; k = 5 \;\Rightarrow a = 10$ i ovo je jedino rješenje u ovom slučaju.

- Broj a je neparan. Neka je $a = 2k+1$.

Na sličan način kao u prvom slučaju nalazimo da je $M = \{0, 1, 2, ..., k\}$ i imamo jednačinu

$$\frac{k\,(k+1)}{2} = 2k+1,$$

koja nema cjelobrojnih rješenja.

Dakle, jedini prirodan broj a koji zadovoljava sve uslove zadatka je broj 10.

Zadatak 9. Dat je pravougli trougao ABC $(\angle ACB = 90^\circ)$. Na kateti AC uzeta je tačka D, a na segmentu BD tačka K tako da je $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. Dokazati da je $BK = 2DC$.

Rješenje: Neka je $\angle ABC = \beta$. Zbog uslova zadatka je i $\angle KAD = \angle AKD = \beta$, odakle slijedi $\measuredangle AKB = \pi - \beta$. Iz trougla ABC nalazimo $\angle KAB = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta$, a koristeći posljednje dvije jednakosti iz trougla KAB imamo da je $\angle ABD = 3\beta - \dfrac{\pi}{2}$, pa je $\angle CBD = \angle CBA - \angle DBA = \frac{\pi}{2} - 2\beta$. Neka je T tačka na produžetku prave AC, preko vrha C, takva da je $DC = CT$. Trouglovi DCB i TCB su podudarni, pa je $\angle TBC = \angle CBD = \frac{\pi}{2} - 2\beta$, pa imamo

$$\angle ABT = \angle ABD + \angle DBC + \angle CBT = \frac{\pi}{2} - \beta = \angle BAC = \angle BAT.$$

Iz posljednje jednakosti imamo $AT = BT$. Iz podudarnosti trouglova DCB i TCB imamo $BD = BT$ što zajedno sa prethodnom jednakošću implicira $BD = AT$. Odavde dalje imamo

$$BK + KD = AD + DC + CT = AD + 2CD.$$

Iz $\angle KAD = \angle AKD$ slijedi $KD = AD$, pa stoga iz $BK+KD = AD+2CD$ imamo $BK = 2CD$ i ovim je dokaz završen.

Zadatak 10. U unutrašnjosti trougla ABC, na težišnici iz vrha A, uzeta je tačka D takva da je $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$. Dokazati da je $AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

Rješenje: Označimo sa T sredinu stranice BC. Neka je D' tačka na produžetku prave DT, preko vrha T, takva da je $DT = TD'$. Tada je $CDBD'$ konveksan četverougao kod koga se dijagonale međusobno polove odakle zaključujemo da je ovaj četverougao paralelogram. Na osnovu ovog imamo $CD' = BD$, $BD' = CD$ i

$$\measuredangle CD'B = \measuredangle CDB = \pi - \measuredangle BAC.$$

Uočimo sada da je $\angle CD'B + \angle CAB = \pi$, odakle slijedi da je $ABD'C$ tetivni četverougao. Na osnovu ovog imamo

$$\triangle ACT \sim \triangle BTD' \;\;\Rightarrow\;\; \frac{AC}{BD'} = \frac{CT}{TD'},$$

$$\triangle ABT \sim \triangle CTD' \;\;\Rightarrow\;\; \frac{AB}{CD'} = \frac{BT}{TD'}.$$

Sada imamo

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AC}{BD'} = \frac{CT}{TD'} = \frac{BT}{TD'} = \frac{AB}{CD'} = \frac{AB}{BD} \;\;\Rightarrow$$

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Zadatak 11. Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj $2^n + n^2$ djeljiv sa 5 ako i samo ako je broj $n^2 \cdot 2^n + 1$ djeljiv sa 5.

Rješenje: Ako je n djeljiv sa 5 tada nijedan od brojeva 2^n+n^2 i $n^2\cdot 2^n+1$ nije djeljiv sa 5 i u ovom slučaju je dokaz završen.

Ako n nije djeljiv sa 5 laganom provjerom slučajeva $n \equiv \pm 1$ i $n \equiv \pm 2 \pmod 5$ zaključujemo da je n^4-1 djeljivo sa 5. Kako je $n^4-1=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$ to jedan od brojeva n^2-1 i n^2+1 mora biti djeljiv sa 5.

- Ako je n^2-1 djeljivo sa 5 tada tvrdnja zadatka slijedi iz jednakosti
$$n^2 2^n+1=\left(n^2-1\right)\left(2^n-1\right)+\left(2^n+n^2\right).$$
- Ako je n^2+1 djeljivo sa 5 tada tvrdnja zadatka slijedi iz jednakosti
$$n^2 2^n+1=\left(2^n+1\right)\left(n^2+1\right)-\left(2^n+n^2\right).$$

Zadatak 12. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu
$$x^3+2y^3-4x-5y+z^2=53.$$

Rješenje: Dokažimo najprije da je za svaki cio broj n broj n^3-n djeljiv sa 3. Uočimo da je $n^3-n=(n-1)\,n\,(n+1)$ proizvod tri uzastopna cijela broja, od kojih je jedan uvijek djeljiv sa 3 i bar jedan uvijek djeljiv sa 2, pa je proizvod $(n-1)\,n\,(n+1)$ uvijek djeljiv sa 6.
Datu jednačinu možemo zapisati u njoj ekvivalentnom obliku
$$\left(x^3-x\right)+2\left(y^3-y\right)-3\left(x+y\right)+z^2=53,$$
odakle slijedi
$$z^2=2-\left[\left(x^3-x\right)+2\left(y^3-y\right)-3\left(x+y\right)-51\right],$$
tj. $z^2=2+3k$, za neki cio broj k, što je nemoguće jer kvadrat cijelog broja uvijek daje ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju sa 3. Iz ovoga slijedi da i data jednačina nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 13. Dokazati da za pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $xyz=1$ vrijedi nejednakost
$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geq x+y+z.$$

Rješenje: Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+z \geq 2\sqrt{\frac{(x+y-1)^2}{z}\cdot z}=2\,|x+y-1| \geq 2\,(x+y-1)$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} \geq 2\,(x+y)-z-2.$$

Analogno je i

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} \geq 2\,(y+z)-x-2,$$

$$\frac{(z+x-1)^2}{y} \geq 2\,(z+x)-y-2.$$

Sumirajući ove nejednakosti imamo

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y} \geq$$

$$2\,(x+y)-z-2+2\,(y+z)-x-2+2\,(z+x)-y-2=$$

$$x+y+z+2\,(x+y+z-3) \geq x+y+z,$$

pri čemu posljednja nejednakost vrijedi zbog

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3.$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako je $x=y=z=1$.

Zadatak 14. U učionici se nalazi 8 kutija u kojima se nalaze knjige. Poznato je da svaka kutija sadrži bar jednu knjigu i da ne postoje dvije kutije sa jednakim brojem knjiga. Također, svaku od kutija je moguće isprazniti tako da se knjige koje se u njoj nalaze rasporede u druge kutije i da pri tome sve od preostalih sedam kutija sadrže jednak broj knjiga. Odrediti najmanji mogući broj knjiga u kutiji koja sadrži najviše knjiga.

Rješenje: Neka su $a_1 > a_2 > ... > a_8$ brojevi knjiga u kutijama. Kako su brojevi a_i prirodni vrijede sljedeće nejednakosti

$$a_1 \geq a_2 + 1 \geq (a_3 + 1) + 1 = a_3 + 2 \geq \cdots \geq a_8 + 7.$$

Ukoliko ispraznimo osmu kutiju tada, da bismo izjednačili broj knjiga u kutijama, kutiji sa rednim brojem i moramo dodati bar $i - 1$ knjiga, za svako $i = 1, 2, 3, \ldots, 7$ (jer svaka od ovih kutija nakon preraspodjele mora sadržavati bar a_1 knjiga). Stoga također vrijedi i

$$a_8 \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

pa vrijedi

$$a_1 \geq a_8 + 7 \geq 28.$$

Iz posljednje nejednakosti zaključujemo da kutija sa najvećim brojem knjiga mora imati bar 28 knjiga. Jednostavnom provjerom dokazujemo da je moguće dostići ovu vrijednost. Naime, dovoljno je uzeti $a_1 = 28, a_2 = 27, \ldots, a_8 = 21$. i za ove vrijednosti lahko provjeravamo da pražnjenjem bilo koje od kutija knjige koje se u njoj nalaze mogu biti raspoređene u preostalih sedam kutija tako da svaka od njih sadrži tačno 28 knjiga.

Zadatak 15. Neka su a, b, p, q prirodni brojevi takvi da su a i b relativno prosti, a je paran i $p, q \geq 3$. Dokazati da broj

$$2a^p b - 2ab^q$$

nije potpun kvadrat.

Rješenje: Pretpostavimo suprotno tvrdnji zadatka, tj. da postoje brojevi a, b, p, q koji zadovoljavaju sve uslove zadatka i za koje je

$$2a^p b - 2ab^q$$

potpun kvadrat. Najprije uočimo da vrijedi jednakost

$$2a^p b - 2ab^q = 2ab\left(a^{p-1} - b^{q-1}\right).$$

Budući da je po pretpostavci a paran prirodan broj to postoji prirodan broj c takav da je $a = 2c$. Tada su b i c također relativno prosti i imamo da je

$$2ab\left(a^{p-1} - b^{q-1}\right) = 4cb\left[(2c)^{p-1} - b^{q-1}\right]$$

potpun kvadrat. Da bi ovaj izraz bio potpun kvadrat $cb\left[(2c)^{p-1} - b^{q-1}\right]$ mora biti potpun kvadrat.

Brojevi c, b i $(2c)^{p-1} - b^{q-1}$ su po parovima relativno prosti, pa kako je njihov proizvod potpun kvadrat to svaki od njih mora biti potpun kvadrat. No, kako je b neparan i potpun kvadrat to mora biti $b \equiv 1 \pmod 4$, odakle slijedi (ovdje koristimo uslov $p, q \geq 3$)

$$(2c)^{p-1} - b^{q-1} \equiv 0 - 1 \equiv 3 \pmod 4,$$

pa $(2c)^{p-1} - b^{q-1}$ ne može biti potpun kvadrat, kontradikcija.

Napomena: Unaprijed se izvinjavamo za sve greške, propuste i nejasnoće u ponuđenim rješenjima. Molimo Vas da nam se za sva pitanja, primjedbe i sugestije obratite putem e-maila $salemmalikic05@gmail.com$.