RAZNI ZADACI
Zadaci za 1. i 2. razred

Salem Malikić, 2. januar 2013.

Zadatak 1. U skupu realnih brojeva riješiti sistem jednačina

$$a + b = 1$$
$$\left(a^2 + b^2\right)\left(a^3 + b^3\right) = a^4 + b^4$$

Zadatak 2. U pravouglom trouglu ABC tačka M je uzeta na kateti BC tako da vrijedi $BM = 2 \cdot MC$. Tačka K je sredina hipotenuze AB. Dokazati da je $\angle BAM = \angle MKC$.

Zadatak 3. Brojevi $y_1, y_2, \ldots, y_{25}$ predstavljaju proizvoljnu permutaciju prirodnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$. Dokazati da je broj

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\ldots(x_{25} - y_{25})$$

paran.

Zadatak 4. Neku osnovnu šlolu pohađa 40 učenika. Ako je poznato da svaka dva učenika imaju zajedničkog djeda dokazati da postoji djed koji u školi ima barem 21 unuče.

Zadatak 5. U oštrouglom trouglu ABC ugao kod vrha C jednak je $45°$. Tačke A_1 i B_1 su podnožja visina iz vrhova A i B, respektivno. Sa H označimo ortocentar trougla ABC. Na segmentima AA_1 i BC izabrane su tačke D i E, respektivno, tako da vrijedi $A_1D = A_1E = A_1B_1$. Dokazati da vrijede sljedeće jednakosti

- $A_1B_1 = \sqrt{\frac{A_1B^2 + A_1C^2}{2}}$
- $CH = DE$

Zadatak 6. Neka su a, b, c, d četiri različita prirodna broja čiji je proizvod potpun kvadrat. Dokazati da se broj $a^4+b^4+c^4+d^4$ može napisati kao suma kvadrata pet prirodnih brojeva.

Zadatak 7. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$ dokazati da vrijedi nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c$$

Zadatak 8. Neka je a prirodan broj i M skup ostataka dobijenih pri dijeljenju broja a sa svakim od prirodnih brojeva koji su manji od a (ukoliko se neki ostatak pojavljuje više puta kao npr. u slučaju $a = 7$ kada se ostatak 1 pojavljuje pri dijeljenju broja a sa 2 ali također i pri dijeljenju broja a sa 3 i 6, tada takav ostatak u skup M ubrajamo samo jedanput pa tako za $a = 7$ imamo $M = \{0, 1, 2, 3\}$). Naći sve $a > 1$ za koje je zbir elemenata skupa M jednak a.

Zadatak 9. Dat je pravougli trougao ABC $(\angle ACB = 90^\circ)$. Na kateti AC uzeta je tačka D a na segmentu BD tačka K tako da je $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. Dokazati da je $BK = 2DC$.

Zadatak 10. U unutrašnjosti trougla ABC, na težišnici iz vrha A, uzeta je tačka D takva da je $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$. Dokazati da je $AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

Zadatak 11. Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj $2^n + n^2$ djeljiv sa 5 ako i samo ako je broj $n^2 \cdot 2^n + 1$ djeljiv sa 5.

Zadatak 12. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu

$$x^3 + 2y^3 - 4x - 5y + z^2 = 53$$

Zadatak 13. Dokazati da za pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $xyz = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z$$

Zadatak 14. U učionici se nalazi 8 kutija u kojima se nalaze knjige. Poznato je da svaka kutija sadrži barem jednu knjigu i da ne postoje dvije kutije sa jednakim brojem knjiga. Također, svaku od kutija je moguće isprazniti tako da se knjige koje se u njoj nalaze rasporede u druge kutije i da pri tome sve od preostalih sedam kutija sadrže jednak broj knjiga. Odrediti najmanji mogući broj knjiga u kutiji koja sadrži najviše knjiga.

Zadatak 15. Neka su a, b, p, q prirodni brojevi takvi da su a i b relativno prosti, ab je paran i $p, q \geq 3$. Dokazati da broj

$$2a^p b - 2ab^q$$

nije potpun kvadrat.

Napomena: Sva pitanja vezana za formulaciju zadataka i eventualna rješenja slati na e-mail $salemmalikic05@gmail.com.$