KOMBINATORIKA 1

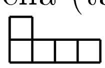
Zadaci za 1. i 2. razred

Salem Malikić

Zadatak 1. Skup $\{1, 2, \ldots, 9\}$ je razbijen u dva disjunktna podskupa A i B. Dokazati da bar u jednom od njih postoje tri različita broja x, y, z za koje vrijedi $x+y=z$. Dokazati (konstruišući kontraprimjer) da takva tvrdnja ne mora da važi za skup $\{1, 2, \ldots, 8\}$.

Zadatak 2. Osnovna škola ima 30 razrednih odjeljenja i 1000 učenika. Dokazati da u toj školi postoji odjeljenje koje ima barem 34 učenika.

Zadatak 3. U razredu ima 40 učenika. Dokažite da postoji mjesec u godini u kojem rođendan slave najmanje četiri učenika tog razreda.

Zadatak 4. Naći najveći broj figura koje možemo staviti na ploču dimenzija 8×8 tako da se figure ne smiju međusobno preklapati dok je rotacija figura dozvoljena (tabela ne mora biti u cjelosti popločana). Izgled figure je sljedeći: 

Zadatak 5. Neka škola ima 10 razreda. Ukoliko je poznato da svaki učenik škole iz nekog razreda poznaje po tačno jednog učenika iz svakog od preostalih 9 razreda, dokazati da je broj učenika u svim razredima jednak.(*"poznavanje"* je uzajamna relacija tj.ukoliko osoba A poznaje osobu B tada i osoba B takodjer poznaje osobu A).

Zadatak 6. Da li je moguće brojeve $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ napisati na vrhove pravilnog osmougla tako da je suma brojeva na bilo koja tri uzastopna vrha veća od

a) 11

b) 13

Zadatak 7. Dokazati da prirodni brojevi od 1 do 15 ne mogu biti podijeljeni u dvije grupe A i B tako da A ima 2 a B 13 elemenata i da je suma elemenata skupa B jednaka proizvodu elemenata skupa A.

Zadatak 8. U nekom društvu matematičara svaki od njih se bavi bar jednom od sljedećih grana matematike: algebrom, analizom, geometrijom ili logikom. Onaj koji se bavi algebrom ili logikom, bavi se i analizom. Onaj koji se bavi geometrijom bavi se i logikom. Onaj koji se bavi analizom i geometrijom, bavi se i algebrom. Kojim od ovih grana se bavi najviše, a kojim najmanje matematičara.

(Odgovor: Najviše matematičara bavi se analizom a najmanje geometrijom.)

Zadatak 9. Na jednom ostrvu nalazi se 1986 kameleona plave boje, 1906 kameleona crvene boje i 985 kameleona crne boje. Kada se sretnu dva kameleona različitih boja, oba promijene boju u treću boju. Da li se može desiti da poslije izvjesnog broja susreta svi kameleoni budu iste boje? Navesti primjer trojke brojeva za koju je odgovor suprotan. Obrazložiti! (Uputstvo: pokazati da je odgovor potrvrdan a za drugi dio zadatka navesti kontraprimjer gledajući invarijantnost po modulu 3).

Zadatak 10. Dato je n sijalica ($n > 13$) od kojih svaka ima svoj prekidač. Dozvoljeno je jednovremeno (u jednom potezu) promijeniti stanje tačno 13 sijalica. U početnom trenutku neke sijalice su upaljene, a neke nisu.
(a) Da li se mogu pogasiti sve sijalice?
(b) Koliko najmanje koraka je za to potrebno ako je $n = 111$ i ako su u početku sve sijalice upaljene?

Zadatak 11. $3n$ učenika je uzelo učešće u zimskoj matematičkoj školi. Svakog dana tačno 3 učenika su bili redari. Po završetku kampa ustanovljeno je da su svaka dva učenika tačno jedanput bili zajedno redari (tj. istog dana).
(i) Ukoliko je $n = 3$ da li je uopće moguće rasporediti učenike (misli se na raspored dana u kojima će biti redari) tako da budu zadovoljeni gore

navedeni uvjeti
(ii) Ukoliko su ispunjeni gonji uvjeti dokazati da n mora biti neparan broj.

Zadatak 12. Emina ispisuje redom brojeve od 1 do 100 na 100 karti (na svaku kartu po tačno jedan broj) i potom daje nekoliko (barem jednu) karti Bojani. Poznato je da za bilo koje dvije karte A i B, pri čemu je A Eminina a B Bojanina karta, karta na kojoj je napisana suma brojeva napisanih na A i B nije među Emininim kartama, dok karta sa proizvodom brojeva napisanih na kartama A i B nije među Bojaninim kartama. Koliko karti ima Bojana ukoliko znamo da se karta sa brojem 13 nalazi među Emininim kartama?

Zadatak 13. Brojevi od 1 do 8 su ispisani na vrhove kocke a potom je na svaku ivicu kocke napisana apsolutna vrijednost razlike brojeva koji se nalaze na vrhovima kocke koji predstavljaju krajeve te ivice. Odrediti najmanji mogući broj ovako dobijenih (različitih) razlika?

Zadatak 14. Međunarodnoj konferenciji prisustvuju po dva predstavnika iz 27 zemalja. Dokazati da se učesnici konferencije ne mogu poredati za okruglim stolom, tako da između svake dvojice učesnika, koji su predstavnici iste zemlje, sjedi tačno 9 drugih učesnika konferencije.

Zadatak 15. Brojevi $1, 2, \ldots, n$ su poredani u niz tako da je svaki od brojeva ili strogo veći od svih svojih prethodnika ili je strogo manji od svih svojih prethodnika. Dokazati da postoji tačno 2^{n-1} ovakvih rasporeda. (Uputstvo: posmatrati najveći i najmanji broj. Pozicionirati ih u niz pa potom gledati sljedeći najveći,najmanji itd...).