RAZNI ZADACI

Zadaci za 3. i 4. razred

Salem Malikić

Zadatak 1. Naći sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ takve da je

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=1-x-y$$

za sve $x,y\in\mathbb{R}$.

Zadatak 2. Naći sve trojke (x,y,z) nenegativnih realnih brojeva koji zadovoljavaju sistem nejednakosti

$$2x\left(3-4y\right)\geq z^2+1$$

$$2y\left(3-4z\right)\geq x^2+1$$

$$2z\left(3-4x\right)\geq y^2+1$$

Zadatak 3. U unutrašnjoj oblasti paralelograma $ABCD$ data je tačka P takva da je $\angle ADP=\angle ABP$ i da je $\angle DCP=30°$. Izračunati $\angle DAP$.

Zadatak 4. Aritmetičku sredinu skupa $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ definišemo kao vrijednost broja $\frac{a_1+a_2+\ldots a_k}{k}$. Za neki prirodan broj n iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ izbrisan je jedan broj. Aritmetička sredina tako dobijenog skupa jednaka je $40\frac{3}{4}$. Koji broj je izbrisan iz prvobitnog skupa?

Zadatak 5. Osam osoba je učestvovalo na zabavi. Poznato je da za svaku osobu među preostalih sedam osoba postoje najviše 3 koje on/ona ne poznaje (ukoliko osoba A ne poznaje osobu B tada ni osoba B ne poznaje osobu A). Dokazati da osobe možemo podijeliti u 4 para tako da se osobe u istom paru poznaju.

Zadatak 6. Naći sve parove (p, q) prostih brojeva takvih da $3 \nmid p+1$ i da je

$$\frac{p^3+1}{q}$$

potpun kvadrat.

Zadatak 7. Neka su a_i za $i = 1, 2, \ldots, n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_2}} + \sqrt[3]{\frac{a_2}{a_3}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{a_n}{a_1}}\right)^3$$

Zadatak 8. Naći sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(2012) = 2013$ i za svaka dva realna broja x i y vrijedi jednakost

$$f(x + f(y)) = x + f(f(y))$$

Zadatak 9. U trouglu ABC tačka G je težište a tačka D je središte stranice CA. Prava koja prolazi tačkom G i paralelna je sa BC siječe AB u E. Dokazati da je $\angle AEC = \angle DGC$ ako i samo ako je $\angle ACB = 90°$.

Zadatak 10. Kvadrat A dimenzija $n \times n$ podijeljen je na jedinične kvadratiće i svaki kvadratić je obojen bijelom ili crnom bojom. Poznato je da su tri od četiri kvadratića koji se nalaze na ćoškovima kvadrata A obojeni bijelom a četvrti crnom bojom. Dokazati da unutar kvadrata A postoji kvadrat dimenzija 2×2 koji sadrži neparan broj bijelih kvadratića i čije su stranice paralelne stranicama kvadrata A .

Zadatak 11. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $2a^2 + b^2 = 9c^2$ dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{2c}{a} + \frac{c}{b} \geq \sqrt{3}$$

Zadatak 12. Dat je tetivni četverougao $ABCD$ u kome je $AB = BC = AD + CD$. Ukoliko je $\angle BAD = \alpha$ i $AC = d$ izraziti površinu četverougla $ABCD$ u funkciji od α i d.

Zadatak 13.* U trouglu ABC u kome je $AB > BC$ tačke K i M su sredine stranica AB i CA, I je centar upisane kružnice. Sa P označimo tačku presjeka pravih KM i CI. Tačka Q izabrana je tako da vrijedi $QP \perp KM$ i $QM \parallel BI$. Dokazati da je $QI \perp AC$.

Zadatak 14.* Naći sve parove (n, p) gdje je n prirodan a p prost broj koji zadovoljavaju jednakost

$$n^3 - p^5 = p^6 + 3n - 2$$

Zadatak 15.* Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i

$$S = \{k \in \mathbb{N} : (k, n) = (k + 1, n), 1 \leq k \leq n - 1\}$$

Izračunati ostatak pri dijeljenju broja $\prod\limits_{k \in S}$ sa n.

Napomena: Zadaci označeni * su teži od ostalih zadataka. Sva pitanja vezana za formulaciju zadataka i eventualna rješenja slati na e-mail $salemmalikic05@gmail.com$.